LOCAL PROPERTIES OF DIFFERENTIAL OPERATORS IN CATEGORIES OF MODULES

A. A. Grigoriantz

Izvestiya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii. Matematika, Vol. 33, No. 5, 1998

The paper considers a localization property of differential operators in categories of modules over commutative algebras, and proves that every differential operator is in fact an operator defined on germs. This means that localization property has algebraic nature. We also show that a jet of a localization is a localization of a jet.

§1. INTRODUCTION

Classical linear differential operators D in partial derivatives possess the following fundamental localization property: for every function f the value of function Df at every point x depends only on values of f in a small vicinity of x. In this paper we prove the localization property for differential operators in categories of modules over a commutative algebra, implying that localization property has purely algebraic nature. We also obtain the following generalization of localization property: every differential operator can be considered as an operator defined on germs. We show that a jet of localization is a localization of a jet and describe the modules of jets by means of multiplication homomorphism kernel. For facts concerning natural transforms of jet functors we refer to [3].

§2. NOTATION AND BASIC DEFINITIONS

This section contains necessary notation and basic definitions mainly following [1] and [2]. Let k be a commutative ring with unit; A be a commutative k-algebra with unit; P, Q be A-modules; $Hom_k(P,Q)$ and $Hom_A(P,Q)$ be A-module of $k-$ (respectively $A-$) linear mapping from P into Q.

©1999 by Allerton Press Inc. Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by Allerton Press, Inc. for library and other users registered with the Copyright Clearance Center (CCC) Transaction Reporting Service, providing that the base fee of $50.00 per copy is paid directly to CCC, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923. An annual license may be obtained only directly from Allerton Press, Inc., 150 5th Avenue, New York, NY 10011.

Observe that $Hom_k(P, Q)$ possesses a natural structure of bimodule. We consider the bracket $[\Delta, f] : P \longmapsto Q$ defined by

$$[\Delta, f](p) = \Delta(fp) - f\Delta p, \quad p \in P.$$

The bracket shows divergence between left and right structures of module.

Definition. The modules $D_n(P, Q)$ of differential operators of order $\leq n$ is defined by

$$D_n(P, Q) = \{\Delta \in Hom_k(P, Q) : [\Delta, f] \in D_{n-1}(P, Q), \text{ for every } f \in A\},$$

and $D_n(P, Q) = 0$ for $n < 0$.

The following properties of modules $D_n(P, Q)$ are evident.

1. $D_n(P, Q) \subset D_m(P, Q)$ for $n \geq m$;
2. $D_0(P, Q) = Hom_A(P, Q)$.

We consider the modul

$$D(P, Q) \equiv \varinjlim D_n(P, Q).$$

We say, that $\Delta \in D(P, Q)$ is a *differential operator of order* n (and write $ord(\Delta) = n$), if $\Delta \in D_n(P, Q) \setminus D_{n-1}(P, Q)$. Up to a representable functor the relation $Q \longmapsto D_n(P, Q)$ can be continued into category of A-bimodules. The representing object $J^n(P)$ of this functor is called *module of jets* of order $\leq n$ of module P. Up to a functor, the relation $P \longmapsto J^n(P)$ can be continued into category of A-bimodules.

The A-algebra of ratios of a ring A and a module of ratios of an A-module P with respect to multiplicative set $S \subset A$ we denote by AS^{-1} and PS^{-1} respectively.

§3. STATEMENT OF RESULTS

We consider an A-bimodule $A \otimes_k P$. Let $I_n(P)$ denote a submodule in $A \otimes_k P$ generated by elements of the form $[...[a \otimes p, f_0]...f_n]$, where

$$[a \otimes p, f] = a \otimes fp - af \otimes p.$$

There exists a canonical isomorphism $J^n(P) \cong (A \otimes_k P)/I_n(P)$ (see [1], §2). In particular, $J^n(A) \cong (A \otimes_k A)/I_n$, where $I_n = I_n(A)$. Description of submodule I_n by means of its generating set is ofen inconvenient. Theorem 1 below describes the structure of I_n and $J_n(A)$, according to Proposition 1.2.3 from [1].

Observe that $A \otimes_k A$ possesses a natural structure of A-bialgebra with multiplication

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd,$$

while $A \otimes_k P$ possesses the structure of $A \otimes_k A$-module. Let

$$\mu : A \otimes_k A \longmapsto A, \quad a \otimes b \longmapsto ab$$

be a multiplication homemorphism. We set $K = ker\ \mu$.

Theorem 1. $I_n = K^{n+1}$*, where* K^n *is the* n*-th power of the ideal* K*.*

Let $\tau = \tau_p : P \longmapsto PS^{-1}$, $\tau_p : p \longmapsto p/1$ be a canonical localization mapping.

Theorem 2 (weak localization property). If $\tau_p(p) = 0$*, then* $\tau_Q(\Delta p) = 0$*, where* $p \in P$ *and* $\Delta \in D(P, Q)$*.*

In other words, Theorem 2 states that the "germ" of the value of differential operator on an element p depends only on "germ" of p.

Theorem 3 (generalized localization property). For every operator $\Delta \in D_n(P, Q)$ *there exists a unique operator* $\Delta' \in D_n(PS^{-1}, QS^{-1})$*, such that the diagram*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta} & Q \\ \tau_p \Big\downarrow & & \Big\downarrow \tau_Q \\ PS^{-1} & \xrightarrow{\Delta'} & QS^{-1} \end{array} \tag{1}$$

is commutative.

For every module P we consider the modules $J^n(PS^{-1})$ and $(J^n(P))S^{-1}$. From general construction it follows (see [1], §4) that there exists a natural homomorphism $(J^n(P))S^{-1} \longmapsto J^n(PS^{-1})$. We show that this homomorphism is isomorphism (i.e. jet of a localization is a localization of jet), namely

Theorem 4. The functors $J^n(-S^{-1})$ *and* $(J^n(\cdot))\,S^{-1}$ *are naturally isomorphic.*

§4. PROOF OF THEOREMS

Proof of Theorem 2. The equality $\tau_p(p) = 0$ means that there exists $f \in S$, such that $fp = 0$ (see [2], §2). We use induction with respect to $ord(\Delta)$. For $ord(\Delta) = 0$ the assertion is evident. By induction hypothesis $\tau_Q([\Delta, f]p) = 0$, because $ord([\Delta, f]) = ord(\Delta) - 1$. On the other hand

$$\tau_Q([\Delta, f]p) = \tau_Q(\Delta(fp) - f\Delta(p)) = -\tau_Q(f\Delta p) = -\tau_A(f)\tau_Q(\Delta p).$$

Therefore $\tau_A(f)\tau_Q(\Delta p) = 0$. Since $\tau_A(f)$ is an invertible element of the ring AS^{-1}, we conclude that $\tau_Q(\Delta p) = 0$. Theorem 2 is proved.

To prove Theorem 1, observe that its assertion is equivalent to the following proposition.

Proposition 1. The ideal K^n is generated as an A-module of elements of the form $[...[1, f_0]...f_n]$, where 1 is the unit of the ring $A \otimes_k A$ and $f_i \in A$.

Proof: The assertion we prove by induction on n. For $n = 0$ we have

$$f \otimes g \in K \Longrightarrow f \cdot g = 0 \Longrightarrow f \otimes g = f(1 \otimes g - g \otimes 1) = f \cdot [1, g].$$

Since elements that have the form $f \otimes g$ generate K, we get $K \subset I_0$. Conversely, it is clear, that elements of the form $[1, g]$ are contained in K. Hence $K = I_0$. It is easy to see, that for every $a, b \in A \otimes_k A$ we have $[ab, f] = a[b, f] = b[a, f]$. Now let $t = r \cdot s \in K^{n+1}$, where $r \in K^n$ and $s \in K$. By induction hypothesis, we have

$$r = \sum_i a_i([...[1, f_i^0]...f_i^{n-1}]), \qquad s = \sum_j b_j[1, g_j].$$

Therefore

$$t = \sum_{i,j} a_i b_j([...[1, f_i^0]...f_i^{n-1}][1, g_j]) = \sum_{i,j} a_i b_j \left([[...[1, f_i^0]...f_i^{n-1}]g_j]\right).$$

Thus, we have $K^{n+1} \subset I_n$. The converse assertion is evident. Proposition 1 is proved.

The proof of Theorem 3 we begin with the following lemma.

Lemma 1. Let $\Delta \in D_n(P, Q)$. For every $g \in A$ and $p \in P$

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i C_{n+1}^i g^{n+1-i} \Delta g^i p \equiv 0. \tag{2}$$

If g is an invertible element from A, then

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_{n+1}^i g^{n+1-i}\Delta g^{i-1}p \equiv 0, \quad p\in P. \tag{3}$$

Proof: According to definition of differential operator of order n, we have

$$\left[[\Delta,\ \underbrace{g]...g}_{n+1}\right]p\equiv 0, \quad p\in P, \quad g\in A. \tag{4}$$

It is easy to see, that (2) and (4) coincide. Substituting $g^{-1}p$ instead of p into (2), we obtain (3). Lemma 1 is proved.

Corollary.

$$g^{n+1}\Delta(g^{-1}p)=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^i g^{n+1-i}\Delta g^{i-1}p. \tag{5}$$

Proof: follows from (3).

Proof of Theorem 3: Let PS^{-1} be a localization of module P. For every differential operator $\Delta\in D(P,Q)$, the existence of continuation onto PS^{-1}, that is the existence of operator Δ', closing the commutative diagram (1), follows its uniqueness. This is because for elements of the form $p/g\in PS^{-1}$, (5) is fulfilled and the images of elements from PS^{-1} are determined uniquely. The existence of Δ' we prove by induction. For $ord\Delta=0$ the operator Δ' is a classic localization of linear mapping Δ. Assume that we have proved existence of Δ' for $ord\,\Delta=n$. We set

$$\Delta'(p/s)=\frac{1}{s}\left(\Delta(p)-[\Delta,s]'(p/s)\right), \quad \Delta\in D_{n+1}(P,Q), \quad s\in S. \tag{6}$$

The formula (6) defines a mapping closing the diagram (1). First we show that the equality

$$\Delta'(p/s)=\frac{1}{hs}\left(\Delta(hp)-[\Delta,hs]'(p/s)\right), \quad h,s\in S \tag{7}$$

holds. We set

$$[\Delta,s]'(p/s)=\frac{q}{s^{n+1}}, \quad [\Delta,hs]'(p/s)=\frac{r}{s^{n+1}}, \tag{8}$$

where $q,r\in Q$ are specified by (5). For instance,

$$q=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^i s^{n+1-i}[\Delta,s]s^{i-1}p. \tag{9}$$

Taking into account (8) and using the properties of a module QS^{-1} (see [2], ch. 2, Corollary 1) the equality (7) can be written as

$$t(s^{2n+3}h\Delta(p) - hs^{2+n}q) = t(s^{2n+3}\Delta(hp) - s^{2+n}r), \quad t \in S,$$

or

$$t's^{n+1}[\Delta, h]p = t'(r - hq), \quad t' = ts^{n+2}. \tag{10}$$

We show that $s^{n+1}[\Delta, h]p = r - hq$. Indeed, we have

$$r - hq = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}[\Delta, hs]\,(s^{i-1}p) - h\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}[\Delta, s]\,(s^{i-1}p) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}\Delta(hs^{i}p) - hs\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}\Delta(s^{i-1}p) - h\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}\Delta(s^{i}p) +$$

$$+ hs\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}\Delta(s^{i-1}p) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{n+1-i}[\Delta, h](s^{i}p). \tag{11}$$

Because $ord[\Delta, h] = n$, in view of (2) we conclude, that the last expression in (11) reduces to $s^{n+1}[\Delta, h]p$. This proves the equality (7).

Now let $\alpha = p/s = p'/s'$ be two distinct representations of $\alpha \in PS^{-1}$. By definition, this means that there exists $t \in S$ satisfying $ts'p = tsp'$. Hence by (7) we have

$$\Delta'(\alpha) = \frac{1}{tss'}\big(\Delta(ts'p) - [\Delta, tss']'(\alpha)\big) = \frac{1}{tss'}\big(\Delta(tsp') - [\Delta, tss']'(\alpha)\big) = \frac{1}{s'}\big(\Delta(p') - [\Delta, s']'(\alpha)\big).$$

Therefore the equality (6) defines an element $\Delta'(\alpha) \in QS^{-1}$. It is clear, that Δ' closes the diagram (1) and that Δ' is a differential operator of order $n+1$, that is $ord\,\Delta' = ord\,\Delta$. Theorem 3 is proved.

Proof of Theorem 4: Let $F : A \longmapsto B$ be a homomorphism of k-algebras. Then each B-module can be considered as an A-module: $a \cdot p = F(a)p$. The corresponding functor $Md(B) \longmapsto Md(A)$, where $Md(A)$ is a category of A-modules, we also will denote by F. It is known (see [1]), that there exists a natural transform of functors

$$\Phi : \; FJ^{n}(\cdot) \longmapsto J^{n}F(\cdot).$$

By Theorem 4, for $F(\cdot) = (\cdot)\,S^{-1}$ the transform Φ is an equivalence transform. Our proof of Theorem 4 consists of direct presentation of inverse natural transform. According to Theorem 3, there exists a unique differential operator j' of order n, that closes the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "j_n"] \arrow[d] & J^nP \arrow[d] \\ PS^{-1} \arrow[r, "j'"] & (J^nP)S^{-1} \end{tikzcd}, \tag{12}$$

where j_n is canonical differential operator of order n, while the vertical pointers stands for localization mappings. By the definition of modules of jets, there exists a unique A-linear mapping μ, that closes the diagram

$$\begin{tikzcd} & PS^{-1} & \\ J^n(PS^{-1}) \arrow[ur, "j_n"] \arrow[rr, "\mu"] & & (J^nP)S^{-1} \arrow[ul, "j'"'] \end{tikzcd}. \tag{13}$$

By Proposition 1.4.5 from [1], we can construct the resulting diagram

$$\begin{tikzcd} & PS^{-1} & \\ J^n(PS^{-1}) \arrow[ur, "j_n"] \arrow[rr, shift left, "\mu"] & & (J^nP)S^{-1} \arrow[ul, "j'"'] \arrow[ll, shift left, "\theta"] \\ & J^nP \arrow[ul, "j_n(\tau)"] \arrow[ur, "\tau'"'] & \end{tikzcd}, \tag{14}$$

where τ is a localization morphism for module J^nP, $j_n(\tau)$ is a canonical lifting of localization for module P, and θ is a morphism constructed in [1]. In fact, θ is homomorphism, as follows from universality property of localization (see Proposition 3 from [2], ch. 2).

We show that the diagram (14) is commutative. To prove this, we need to verify the equalities

$$\theta \circ j' = j_n, \quad \mu \circ j_n(\tau) = \tau. \tag{15}$$

Let $p \in P$. Then

$$[\mu \circ j_n(\tau)](j_n(p)) = \mu(j_n(\tau)(j_n(p)) = \mu(j_n(p/1)) = j'(p/1) = j_n(p)/1 = \tau(j_n(p)).$$

Because elements of the form $j_n(p)$ generate J^nP, this yields the second equality in (15). Similarly

$$\theta \circ j'(p/1) = \theta(j_n(p)/1) = \theta(\tau(j_n(p))) = j_n(\tau)(j_n(p)) = j_n(p/1).$$

Hence according to (5),

$$\theta(j'(p/s)) = \theta\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{-i}j'(s^{i-1}p/1)\right) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{-i}\theta(j'(s^{i-1}p/1)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_{n+1}^{i}s^{-i}j_n(s^{i-1}p/1) = j_n(p/s),$$

yielding the first equality in (15).

Further, by universality property of localization we have $\mu \circ \theta = id$, while the universality property of jets implies $\theta \circ \mu = id$. Thus, θ is an isomorphism with inverse isomorphism μ. Theorem 4 is proved.

R E F E R E N C E S

1. A. M. Vinogradov, I. C. Krasil'schik, V. V. Lychagin, Introduction to Geometry of Non-Linear Differential Equations [in Russian], Moscow, Nauka, 1986.
2. N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Hermann, 1965.
3. I. Kolář, Natural Operations in Differential Geometry, Springer, Berlin, 1993.

12 January 1998

Armenian State
Engineering University

Локальные свойства дифференциальных операторов в категории модулей.

Григорьянц А. А.

1. Введение.

Классический линейный дифференциальный оператор (далее д.о.) D в частных производных обладает следующим фундаментальным свойством локальности: для любой функции f значение функции Df в произвольной точке x зависит лишь от значения функции f в сколь угодно малой окрестности точки x. В данной работе аналогичный результат получен для д.о. в категории модулей над коммутативной алгеброй. Таким образом, установлено, что свойство локальности имеет чисто алгебраическую природу. Получено также обобщение свойства локальности, состоящее в том что любой д.о. может естественно рассматриваться как оператор, определенный на ростках (в классическом случае ростков гладких функций эти два свойства совпадают). С помощью обобщенного свойства локальности строится, обращение естественного морфизма функторов джетов, возникающего при замене колец (см. [1]), в случае перехода к локализации данного кольца. Грубо говоря, показано, что "джет локализации есть локализация джета". (Об исследованиях в области естественных преобразований джет-функторов см. [3], там же можно найти подробную библиографию). Кроме того, получено описание модуля джетов с помощью ядра гомоморфизма умножения.

2. Обозначения и основные определения.

Подробное изложение содержания этого пункта можно найти в [1] и [2].

Пусть k – коммутативное кольцо с единицей, A – коммутативная k-алгебра с единицей; P, Q – A-модули, $Hom_k(P, Q)$ (соответственно $Hom_A(P, Q)$) A-модуль k- (соответственно A-) линейных отображений из P в Q. A-модуль $Hom_k(P, Q)$ обладает естественной структурой бимодуля. Введем скобку $[\Delta, f]: P \to Q$:

$$[\Delta, f](p) = \Delta(fp) - f\Delta p,$$

где $p \in P$. Таким образом скобка показывает отклонение правой структуры модуля от левой.

Введем по индукции модули $D_n(P, Q)$ д.о. порядка $\le n$ из P в Q.

<u>Определение 1.</u> Положим:

i. $D_n(P, Q)=0$, при $n<0$;

ii. $D_n(P, Q)=\{\Delta \in Hom_k(P,Q) \mid [\Delta, f] \in D_{n-1}(P, Q)$, для любого $f \in A\}$.

Следующие свойства модулей $D_n(P, Q)$ очевидны:

1. $D_n(P, Q) \subset D_m(P, Q)$, если $n \le m$

2. $D_0(P, Q) = Hom_A(P, Q)$.

Введем также в рассмотрение модуль:

$$D(P,Q) \overset{def}{=} \varinjlim D_m(P,Q).$$

Скажем, что $\Delta \in D(P, Q)$ есть д.о. порядка n ($\deg(\Delta)=n$), если $\Delta \in D_n(P, Q) \setminus D_{n-1}(P, Q)$.

Соответствие $Q \mapsto D_n(P, Q)$ продолжается до представимого функтора в категорию A-бимодулей. Представляющий объект этого функтора (обозначение: $J^n(P)$) называется модулем джетов порядка $\leq n$ модуля P. Соответствие $P \mapsto J^n(P)$ продолжается до функтора в категорию A-бимодулей. Обозначим $J^n(A) = J^n$.

Кольцо (точнее: A-алгебру) частных кольца A (соответственно модуль частных A-модуля P) относительно мультипликативного подмножества $S \subset A$ мы будем обозначать AS^{-1} (соответственно PS^{-1}) (см. [2]).

3. Формулировка результатов.

3.1 Структура модуля $J^n(A)$.

Введем в рассмотрение A-бимодуль $A\otimes_k P$. Пусть $I_s(P)$ – означает подмодуль в $A\otimes_k P$, порожденный элементами вида $[...[a\otimes p, f_0]...f_s]$, где скобка определяется обычным образом:

$$[a\otimes p, f] = a\otimes fp - af\otimes p.$$

Известно, что имеет место канонический изоморфизм $J^n(P) \cong (A\otimes_k P)/I_n(P)$ (см. [1]). В частности, $J^n \cong (A\otimes_k A)/I_n$, где $I_n = I_n(A)$. Описание подмодуля I_n его порождающим множеством во многих отношениях неудобно. Формулируемая ниже теорема проясняет структуру I_n, а вместе с ним и J^n.

Заметим прежде всего, что $A\otimes_k A$ обладает естественной структурой A-биалгебры с умножением: $(a\otimes b)(c\otimes d) = ac\otimes bd$, а $A\otimes_k P$ – структурой $A\otimes_k A$-модуля. Пусть $\mu: A\otimes_k A \to A$, $\mu: a\otimes b \mapsto ab$ – гомоморфизм умножения. Обозначим $K = \ker \mu$, K^n – n-ая степень идеала K.

<u>Теорема A.</u> Имеет место равенство: $I_n = K^{n+1}$.

Согласно результату [1] предл. 1.2.3, теорема A проливает свет на структуру модуля $J^n(P)$.

3.2 Свойство локальности.

Пусть $\tau = \tau_P: P \to PS^{-1}$, $\tau_P: p \mapsto p/1$ – каноническое отображение локализации и $\Delta \in D(P, Q)$.

<u>Теорема B.</u> ***(Слабое свойство локальности)*** Если $\tau_P(p) = 0$, то $\tau_Q(\Delta p) = 0$, где $p \in P$.

Другими словами, “росток” значения д.о. на элементе p зависит только от “ростка” элемента p.

<u>Теорема B'.</u> ***(Обобщенное свойство локальности)*** Для любого оператора $\Delta \in D_n(P, Q)$, существует единственный оператор $\Delta' \in D_n(PS^{-1}, QS^{-1})$, такой что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\tau_P"'] & Q \arrow[d, "\tau_Q"] \\ PS^{-1} \arrow[r, "\Delta'"] & QS^{-1} \end{tikzcd}$$

Заметим, что теорема B' есть существенное усиление теоремы B.

3.3 Локализация модулей джетов и джет-модули локализаций.

Для любого модуля P введем в рассмотрение модули $J^n(PS^{-1})$ и $(J^n(P))S^{-1}$. Из общей конструкции (см. [1, п.4]) следует, что существует естественный гомоморфизм $(J^n(P))S^{-1} \to J^n(PS^{-1})$. Мы покажем, что этот гомоморфизм является изоморфизмом.

<u>Теорема C.</u> Функторы $J^nS^{-1}(\cdot)$ и $S^{-1}J^n(\cdot)$ естественно изоморфны.

4. Доказательство теорем A и B.

Докажем сперва теорему B. Как известно (см. [2]), равенство $\tau_P(p) = 0$ означает, что существует $f \in S$, такой что $fp = 0$. Применим индукцию по $\deg(\Delta)$. При $\deg(\Delta) = 0$ утверждение очевидно. Далее, $\tau_Q([\Delta, f]p) = 0$ по предположению индукции, т.к. $\deg([\Delta, f])=\deg(\Delta)-1$. С другой стороны:

$$\tau_Q([\Delta, f]p) = \tau_Q(\Delta(fp) - f\Delta(p)) = -\tau_Q(f\Delta p) = -\tau_A(f)\cdot\tau_Q(\Delta p).$$

Таким образом, $\tau_A(f)\cdot\tau_Q(\Delta p) = 0$, но $\tau_A(f)$ – обратимый элемент кольца AS^{-1}, откуда заключаем, что $\tau_Q(\Delta p) = 0$. ◆

Теорема A, очевидно, эквивалентна следующему утверждению: идеал K^n порождается как A-модуль элементами вида:

$$[...[1, f_0]...f_n],$$

где 1 – единица кольца $A\otimes_k A$, $f_i \in A$.

Доказательство этого утверждения проведем индукцией по n. При $n = 0$ имеем: $f\otimes g \in K \Rightarrow f\cdot g = 0 \Rightarrow f\otimes g = f(1\otimes g - g\otimes 1) = f\cdot[1, g]$, т.е., так как элементы вида $f\otimes g$ порождают K, $K \subset I_0$. И обратно, очевидно, что элементы вида $[1, g]$ содержатся в K. Итак, $K = I_0$. Легко видеть, что для любых элементов $a, b \in A\otimes_k A$ имеют место равенства: $[ab, f] = a[b, f] = b[a, f]$. Пусть теперь $t = r\cdot s\in K^{n+1}$, где $r\in K^n$ и $s\in K$. Тогда по предположению индукции:

$$r = \sum_i a_i([\ldots[1,f_i^0]\ldots f_i^{n-1}]$$

$$s = \sum_j b_j[1,g_j]$$

Откуда следует:

$$t = \sum_{i,j} a_i b_j([\ldots[1,f_i^0]\ldots f_i^{n-1}]\cdot[1,g_j]) = \sum_{i,j} a_i b_j([[\ldots[1,f_i^0]\ldots f_i^{n-1}]g_j]).$$

Таким образом, $K^{n+1} \subset I_n$. Обратное утверждение очевидно. ◆

5. Доказательство теоремы B'.

Лемма. Пусть $\Delta \in D_n(P, Q)$. Тогда для любого $g\in A$ и любого $p\in P$ имеет место формула:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_i^{n+1} g^{n+1-i}\Delta g^i p \equiv 0. \qquad (1.)$$

если же g – обратимый элемент из A, то кроме того имеем:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_i^{n+1} g^{n+1-i}\Delta g^{i-1} p \equiv 0. \qquad (2.)$$

для всех $p\in P$.

Доказательство. Согласно определению д.о. порядка n, имеем:

$$[[\Delta, \underbrace{g]\ldots g}_{n+1}]p \equiv 0 \qquad (3.)$$

для всех $p\in P$, и для любого обратимого $g\in A$. Легко видеть, что (1) – это формула (3), записанная в раскрытом виде. Для доказательства (2) достаточно подставить в (1) $g^{-1}p$ вместо p. ◆

Следствие. Имеет место формула:

$$g^{n+1}\Delta(g^{-1}p) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1} C_i^{n+1} g^{n+1-i}\Delta g^{i-1} p \qquad (4.)$$

Доказательство. Это просто иная форма записи (2). ◆

Пусть теперь PS^{-1} – локализация модуля P. Тогда для любого д.о. $\Delta\in D(P, Q)$, из существования продолжения Δ на PS^{-1} (т.е. из существования оператора Δ' замыкающего коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\tau_P"'] & Q \arrow[d, "\tau_Q"] \\ PS^{-1} \arrow[r, "\Delta'"] & QS^{-1} \end{tikzcd} \qquad (5.)$$

вытекает его единственность, т.к. для элементов вида $p/g \in PS^{-1}$ должна выполняться формула (4), а, значит, образы элементов из PS^{-1} определены однозначно. Мы докажем существование Δ' по индукции. При deg Δ = 0, Δ' – это классическая локализация линейного отображения Δ. Пусть теперь доказано существование Δ' при deg Δ = n. Положим:

$$\Delta'(p/s) = \frac{\Delta(p) - [\Delta, s]'(p/s)}{s} \qquad (6.)$$

для $\Delta \in D_{n+1}(P, Q)$ и $s \in S$.

Теорема. Формула (6) корректно определяет отображение, замыкающее диаграмму (5).

Доказательство. Во-первых покажем, что имеет место равенство:

$$\frac{\Delta(p) - [\Delta, s]'(p/s)}{s} = \frac{\Delta(hp) - [\Delta, hs]'(p/s)}{hs}, \qquad (7.)$$

где h – любой элемент из S. Положим:

$$[\Delta, s]'(p/s) = q/s^{n+1},\ [\Delta, hs]'(p/s) = r/s^{n+1}, \qquad (8.)$$

где $q, r \in Q$ определяются равенством (4). Например:

$$q = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} [\Delta, s] s^{i-1} p. \qquad |(9.)$$

Тогда с учетом (8), исходя из свойств модуля QS^{-1} (см. [2] гл. II §2, следствие 1) можно переписать (7) в виде:

$$t(s^{2n+3} h\Delta(p) - hs^{n+2} q) = t(s^{2n+3}\Delta(hp) - s^{n+2} r),$$

где t – некоторый элемент из S. Или в виде:

$$t's^{n+1}[\Delta, h]p = t'(r - hq) \qquad (10.)$$

где $t' = ts^{n+2}$. Заметим, что последние два равенства – это равенства элементов из Q. Мы покажем, что на самом деле:

$$s^{n+1}[\Delta, h]p = r - hq$$

Действительно, раскрывая правую часть получим:

$$\begin{aligned} r - hq &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} [\Delta, hs](s^{i-1} p) - h \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} [\Delta, s](s^{i-1} p) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} \Delta(hs^i p) - hs \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} \Delta(s^{i-1} p) - \\ &- h \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} \Delta(s^i p) + hs \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} \Delta(s^{i-1} p) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} [\Delta, h](s^i p) \end{aligned} \qquad (11.)$$

Но, учитывая, что deg [Δ, h] = n, согласно (1), заключаем, что последнее выражение в (11) есть $s^{n+1}[\Delta, h]p$. Итак, равенство (7) доказано.

Пусть теперь $\alpha = p/s = p'/s'$ различные представления $\alpha \in PS^{-1}$, что, согласно определению, означает существование $t \in S$, такого, что $ts'p = tsp'$. Тогда, с учетом (7) можно написать:

$$\frac{\Delta(p)-[\Delta,s]'(\alpha)}{s}=\frac{\Delta(ts'p)-[\Delta,tss']'(\alpha)}{tss'}=$$
$$=\frac{\Delta(tsp')-[\Delta,tss']'(\alpha)}{tss'}=\frac{\Delta(p')-[\Delta,s']'(\alpha)}{s'}$$

Таким образом, формула (6) корректно определяет элемент $\Delta'(\alpha)\in QS^{-1}$. Очевидно, что Δ' замыкает диаграмму (5). ◆

Автоматическая проверка показывает, что Δ' есть д.о. порядка n+1, т.е. $\deg \Delta' = \deg \Delta$.

12. Доказательство теоремы С.

Пусть $F : A \to B$ – гомоморфизм k-алгебр. Тогда, каждый B-модуль может быть рассмотрен как A-модуль: $a\cdot p = F(a)p$. Соответствующий функтор $Md(B) \to Md(A)$, где $Md(A)$ – категория A-модулей, будет также обозначаться через F. Как показано в [1] существует естественное преобразование функторов Φ: $FJ^n(\cdot) \to J^nF(\cdot)$. В теореме С фактически утверждается, что в случае $F = S^{-1}$, т.е. в случае перехода к локализациям, это преобразование является эквивалентностью.

Наше доказательство состоит в предъявлении обратного естественного преобразования. Согласно теореме B', существует единственный д.о. j' порядка n, замыкающий коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "j_n"] \arrow[d] & J^nP \arrow[d] \\ PS^{-1} \arrow[r, "j'"] & (J^nP)S^{-1} \end{tikzcd} \qquad (13.)$$

где j_n – канонический д.о. порядка n, а вертикальные стрелки суть отображения локализации. А согласно определению модулей джетов, существует единственное A-линейное отображение μ, замыкающее диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & PS^{-1} \arrow[dl, "j_n"'] \arrow[dr, "j'"] & \\ J^n(PS^{-1}) \arrow[rr, "\mu"] & & (J^nP)S^{-1} \end{tikzcd} \qquad (14.)$$

С учетом результата из [1] (см. предл. 1.4.5.), можно составить следующую результирующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & PS^{-1} \arrow[dl, "j_n"'] \arrow[dr, "j'"] & \\
J^n(PS^{-1}) \arrow[rr, shift left, "\mu"] & & (J^nP)S^{-1} \arrow[ll, shift left, "\theta"] \\
 & J^nP \arrow[ul, "j_n(\tau)"] \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd} \qquad (15.)$$

где τ – морфизм локализации для модуля J^nP, $j_n(\tau)$ – каноническое поднятие морфизма локализации для модуля P, θ – морфизм построенный в [1]. На самом деле, θ – есть гомоморфизм из свойства универсальности локализации (см. [2] гл. II §2, предл. 3) и, как таковой единственен.

Диаграмма (15) коммутативна. Действительно, чтобы убедиться в этом нужно проверить лишь равенства:

$$\theta\circ j' = j_n,\ \mu\circ j_n(\tau) = \tau. \qquad (16.)$$

Пусть $p\in P$, тогда можно написать:

$$[\mu\circ j_n(\tau)](j_n(p)) = \mu(j_n(\tau)(j_n(p))) = \mu(j_n(p/1)) =$$
$$= j'(p/1) = j_n(p)/1 = \tau(j_n(p)),$$

что доказывает второе из равенств (16), так как элементы вида $j_n(p)$ порождают J^nP. Аналогично, для первого равенства имеем:

$$\theta\circ j'(p/1) = \theta(j_n(p)/1) = \theta(\tau(j_n(p))) = j_n(\tau)(j_n(p)) = j_n(p/1).$$

Теперь, согласно (4), можно написать:

$$\theta(j'(p/s)) = \theta\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_i^{n+1}s^{-i}j'(s^{i-1}p/1)\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_i^{n+1}s^{-i}\theta(j'(s^{i-1}p/1)) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_i^{n+1}s^{-i}j_n(s^{i-1}p/1) = j_n(p/s)$$

что доказывает первое из равенств (16).

Далее, $\mu\circ\theta = \mathrm{id}$ по свойству универсальности локализации, $\theta\circ\mu = \mathrm{id}$ по свойству универсальности джетов. Итак, θ – изоморфизм с обратным изоморфизмом μ.

ЛИТЕРАТУРА.

1. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин "Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений", Москва, "Наука", 1986 г.
2. Н. Бурбаки "Коммутативная алгебра", Москва, "Мир", 1971 г.
3. Kolář, Ivan. "Natural operations in differential geometry.» Springer-Verlad, Berlin, 1993.

УДК 514.762.

А. А. ГРИГОРЬЯНЦ.

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПРИТАЦИИ ТЕНЗОРА КРУЧЕНИЯ СВЯЗНОСТИ.

1. Введение.

Среди инвариантов связности на многообразии важнейшими, как известно, являются тензоры кривизны и кручения. Классическая геометрическая трактовка этих тензоров хорошо известна (см., например, [1] стр. 417-420, 494-507). Однако в отличие от тензора кривизны, геометрическая трактовка тензора кручения некоторыми авторами считается не вполне удовлетворительной (см., например, [2] стр. 50). В настоящей работе предлагается новая геометрическая интерпретация тензора кручения связности на многообразии, которая на наш взгляд отличается от классической инвариантностью и геометрической наглядностью конструкции. По нашим сведениям предложенная трактовка в действительности является новой (см., например, обзорные статьи Ю. Г. Люмисте [3], Б. Н. Шапуков [4]).

Для данной связности ∇ (здесь и далее мы пишем “связность” вместо “линейная связность”) на многообразии M рассмотрим сопряженную связность ∇^* в кокасательном расслоении. Ей соответствует некоторое распределение H^* на многообразии T^*M. (В дальнейшем мы часто не делаем терминологического различия между связностью и соответствующим распределением.) Пусть $H^{*\perp}$ – распределение ортогональное H^* в канонической симплектической структуре кокасательного многообразия. Мы докажем, что $H^{*\perp}$ также является связностью. Один из основных результатов работы состоит в следующем :

Пусть $\nabla^{\perp}$ оператор связности сопряженной к $H^{*\perp}$, тогда $T = \nabla - \nabla^{\perp}$ – тензор кручения связности ∇.

Как следствие получаем, что тензор кручения тогда и только тогда равен нулю, когда распределение H^* лагранжево, т.е. H^*_p лагранжево подпространство симплектического пространства T_pT^*M , где $p \in T^*M$. Таким образом, можно сказать, что тензор кручения связности ∇ есть “мера нелагранжевости” сопряженной связности ∇^*. Точные формулировки приведены в п.3.

Определение линейной связности в векторном расслоении как распределения на тотальном пространстве расслоения не пользуется популярностью, скорее всего, по причине неинвариантности фразы: “горизонтальное распределение, линейно зависящее от координат вдоль слоя”, но обладает преимуществом геометрической наглядности. Так как наша конструкция опирается именно на это определение, мы приводим его инвариантную формулировку (см. опр. 2.4).

Связность $\nabla^\perp$ можно построить непосредственно по ∇, т.е. не обращаясь к T^*M. Связь между ∇ и $\nabla^\perp$ осуществляется посредством канонической инволюции второго касательного расслоения (см. теор.4.6) . В операторной интерпретации связь эта очевидна и дается формулой $\nabla^\perp{}_X Y=\nabla_Y X+[X,Y]$. Аналогичная связь имеется между операторами связностей $H^{*\perp}$ и H^*, которые мы обозначим $\nabla^{*\perp}$ и ∇^* соответственно:

$$\langle \nabla^{*\perp}{}_X\, \alpha, Y\rangle = \langle \nabla^*{}_Y\, \alpha, X\rangle + \langle d\alpha, X\wedge Y\rangle$$

Наша терминология и обозначения близки к терминологии и обозначениям принятым в [5]. Векторное расслоение π: $E\to M$ мы обычно обозначаем просто через E, кроме того положим n=dimE и m=dimM. Модуль сечений расслоения E обозначается через $\boldsymbol{E}$, модули векторных и ковекторных полей – через $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{T}$* соответственно. E_x– означает слой расслоения E над $x\in M$. Для координат используются следующие обозначения: $x^i=\mathbf{x}$ – для координат точки многообразия; $X^i=\mathbf{X}$ – для координат вектора из TM в базисе $\partial/\partial x^i$; $p^i=\mathbf{p}$ – для координат вектора из T^*M в базисе dx^i; $(Y^i ,\xi^i)=(\mathbf{Y}, \xi)$ –

для координат вектора из TTM в базисе $\partial/\partial x^i$; $\partial/\partial X^i$; $a^i = \mathbf{a}$ – для координат в слое расслоения E и т. д.

Пусть E и F – векторные расслоения над M. Мы отождествляем расслоения $E^*\otimes F$ и Hom(E,F) посредством канонического изоморфизма между ними. Если S сечение расслоения $E^*\otimes F$ и X сечение E, то S(X) или $\langle S;X\rangle$ обозначает соответствующую свертку. Кроме того , проекции различных расслоений мы часто обозначаем одной и той же буквой π. Если $f : M' \to M$ – гладкое отображение , то для поднятых посредством f на M' объектов (гомоморфизмов, расслоений, сечений и т.д.) мы часто используем те же обозначения, что и для исходных объектов над M.

2. *Об инвариантной форме условий горизонтальности.*

Пусть $\pi : E \to M$ – векторное расслоение . Дифференциал $d\pi : TE \to TM$ проекции π определяет морфизм расслоений $TE \to \pi^*(TM)$ над E, который мы тоже обозначим $d\pi$. Ker($d\pi$) – подрасслоение вертикальных подпространств в TE. Так как линейное пространство изоморфно своему касательному пространству в любой точке, то определено вложение $\iota : \pi^*E \to TE$ расслоений над E, отождествляющее слой расслоения π^*E, рассматриваемый как подмногообразие в E, с его касательным пространством в данной точке; причем $\iota(\pi^*E)=\mathrm{Ker}(d\pi)$, т.е. следующая короткая последовательность расслоений составленная из ι и $d\pi$:

$$(2.1)\quad 0 \to \pi^*E \to TE \to \pi^*(TM) \to 0$$

точна (см. [6], стр. 155).

Связность H в расслоении E можно интерпретировать как расщепление (2.1) удовлетворяющее дополнительно “условию горизонтальности” , которое можно выразить следующим образом: распределение H должно линейно зависеть от координат вдоль слоя расслоения E .

Чтобы придать этому определению инвариантную форму мы воспользуемся конструкцией касательного расслоения к расслоению E. Тройка (TE, $d\pi$, TM) наделяется структурой 2n-мерного векторного расслоения (см. [6], стр. 152), которое называется касательным расслоением к расслоению E.

Мы явно опишем линейную структуру в слоях расслоения TE . Пусть E_1 и E_2 пара векторных расслоений над M, и $E_1 \oplus E_2$ их сумма Уитни. Многообразие $T(E_1 \oplus E_2)$ обладает структурой двойного расслоения с базами TM и $E_1 \oplus E_2$. Пусть теперь $TE_1 \oplus TE_2$ – сумма Уитни над TM расслоений TE_1 и TE_2. Определим проекцию $\pi : TE_1 \oplus TE_2 \to E_1 \oplus E_2$ по формуле : $\pi(\xi_1; \xi_2) = (\pi_1(\xi_1); \pi_2(\xi_2))$, где $\pi_i : TE_i \to E_i$ – канонические проекции. Из коммутативности диаграммы :

$$\begin{tikzcd} TE_i \arrow[r] \arrow[d, "d\pi_i"] & E_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ TM \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

следует, что отображение π корректно определено. Тройка ($TE_1 \oplus TE_2$; π; $E_1 \oplus E_2$) является векторным расслоением со слоем : $(TE_1 \oplus TE_2)_{(a,b)} = \{(\xi_1; \xi_2)/ \xi_1 \in T_aE_1; \xi_2 \in T_bE_2; \xi_i \in (TE_1 \oplus TE_2)_X; X \in TM; i=1;2\}$,где $a \in E_1$; $b \in E_2$. Сложение в $(TE_1 \oplus TE_2)_{(a,b)}$ определяется по формуле $(\xi_1; \xi_2)+(\eta_1; \eta_2)=(\xi_1+\eta_1; \xi_2+\eta_2)$, где $\xi_1+\eta_1$ и $\xi_2+\eta_2$ вычисляются в T_aE_1 и T_bE_2 соответственно. Если $\eta_i \in (TE_1 \oplus TE_2)_Y$; i=1;2, то $\xi_i+\eta_i \in (TE_1 \oplus TE_2)_{X+Y}$. Умножение на число определяется аналогично.

<u>Теорема 2.1.</u> Двойные расслоения $T(E_1 \oplus E_2)$ и $TE_1 \oplus TE_2$ канонически изоморфны.

<u>Доказательство.</u> Пусть ρ_i: $E_1 \oplus E_2 \to E_i$ – отображения проектирования. По свойству универсальности суммы Уитни найдется единственный морфизм ι , такой что коммутативна диаграмма (над TM) :

$$\begin{tikzcd}
& \text{Ò}(\text{Å}_1\oplus \text{Å}_2) \arrow[dl, "d\rho_1"'] \arrow[d, "\iota"] \arrow[dr, "d\rho_2"] & \\
\text{ÒÅ}_1 & \text{ÒÅ}_1\oplus\text{ÒÅ}_2 \arrow[l, "\delta_1"'] \arrow[r, "\delta_2"] & \text{ÒÅ}_2
\end{tikzcd}$$

Из $\iota(a)=0$ следует, что $d\rho_i(a)=\delta_i(\iota(a))=0$. Но $d\rho_1(a)=d\rho_2(a)=0$ влечет $a=0$ (последнюю импликацию легче всего усмотреть в координатах). Итак, ι – мономорфизм. Теперь из совпадения размерностей расслоений $T(E_1\oplus E_2)$ и $TE_1\oplus TE_2$ следует, что ι – изоморфизм (над TM). Аналогично доказывается, что ι – изоморфизм и над $E_1\oplus E_2$. □

В дальнейшем мы отождествляем многообразия $T(E_1\oplus E_2)$ $TE_1\oplus TE_2$ посредством ι. Таким образом можно написать :

$$T(E_1\oplus E_2)=\{(\xi_1,\xi_2)/\xi_i\in TE_i\,;\, d\pi_1(\xi_1)=d\pi_2(\xi_2)\},$$

$$[T(E_1\oplus E_2)]_X=\{(\xi_1,\xi_2)/\xi_i\in TE_i\,;\, d\pi_1(\xi_1)=d\pi_2(\xi_2)=X\},\ X\in TM,$$

$$[T(E_1\oplus E_2)]_{(a,b)}=\{(\xi_1,\xi_2)/\xi_1\in T_aE_1\,;\,\xi_2\in T_bE_2\,;\, d\pi_1(\xi_1)=d\pi_2(\xi_2)\},\ a\in E_1\,;b\in E_2\,.$$

Каноническое вложение $i: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\lambda\mapsto(\lambda,0)$ определяет вложение расслоений $i': \mathbb{R}_{TM}\to T\mathbb{R}_M$. В самом деле : $\mathbb{R}_{TM}=TM\times\mathbb{R}$, а $T\mathbb{R}_M=T(M\times\mathbb{R})=TM\times\mathbb{R}^2$ и нужно положить $i'=1_{TM}\times i$. Если теперь $\Pi: E\times\mathbb{R}_M\to E$ – морфизм умножения , то положим $\Pi'=d\Pi\circ(1_{TE}\times i'): TE\times\mathbb{R}_{TM}\to TE$.

<u>Теорема 2.2.</u> Пусть $\Sigma: E\oplus E\to E$ –морфизм сложения, тогда сложение и умножение в расслоении $d\pi: TE\to TM$ определяются по формулам i) $\xi+\eta=d\Sigma(\xi,\eta)$; ii) $\lambda\xi=\Pi'(\xi,\lambda)$, где $\xi,\eta\in(TE)_X$; $\lambda\in\mathbb{R}$; $X\in TM$.

<u>Доказательство</u>. i) Фиксируем тривиализацию (U,φ). Тогда дифференциал $d\Sigma_{(a,b)}$ в точке $(a,b)\in E\oplus E$ задается матрицей :

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 & 0\\ 0 & E_m & E_m\end{pmatrix},$$

где E_n– единичная матрица размера $n\times n$. И, следовательно , $d\Sigma$ действует по правилу :$d\Sigma_{(a,b)}: (\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{X},\xi,\eta)\mapsto(\mathbf{x},\mathbf{a}+\mathbf{b};\mathbf{X},\xi+\eta)$, где $(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{b};\mathbf{X},\xi,\eta)$

– координаты вектора $(\xi,\eta) \in T(E\oplus E)$. Аналогичное выражение в координатах имеет сумма $\xi+\eta$.

ii) Дифференциал $d\Pi_{(a,\lambda)}$ в точке $(a,\lambda)\in E\oplus IR_M$ задается матрицей: $\begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda E_m & a \end{pmatrix}$, и , следовательно, переводит вектор с координатами $(\mathbf{X}, \xi, t)\in$

$T_{(a,\lambda)}(E\oplus IR_M)$ в вектор с координатами $(\mathbf{X}, \lambda\xi+t\mathbf{a})\in T_{\lambda a}E$. Тогда П' действует по правилу : $(\mathbf{a}, \mathbf{X}, \xi, \lambda) \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{X}, \xi, \lambda, 0) \mapsto (\lambda\mathbf{a}, \mathbf{X}, \lambda\xi)$, т.е. является умножением вектора с координатами $(\mathbf{a}, \xi) \in T_X E$ на λ , где $X \in T_{\pi(a)}M$. □

Теперь не представляет труда сформулировать инвариантные "условия горизонтальности" , (т.е. условия необходимые и достаточные для того чтобы распределение на многообразии E задавало связность в расслоении E).

<u>Теорема. 2.3.</u> Распределение H на E расщепляющее последовательность (2.1) является связностью тогда и только тогда, когда H есть подрасслоение двойного расслоения TE.

<u>Доказательство</u>. Пусть H – расщепление (2.1) и (U,φ) – некоторая тривиализация. Тогда найдется единственный базис аннулятора H над U вида: $\vartheta^i = da^i + e^i_k(\mathbf{x},\mathbf{a})dx^k$, где ϑ^i – линейные 1-формы, составляющие базис Ann(H) над U, $(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ – координаты в тривиализации (U,φ) (см. [5], стр 178). В случае связности функции e^i_k должны быть линейны по $\mathbf{a}$. Линейность же e^i_k по $\mathbf{a}$ равносильна тому, что H есть векторное расслоение над TM. В самом деле: пусть $(\xi_1;\xi_2)\in[H\oplus H]_X$, $X\in TM$. Это значит, что $\vartheta(\xi_i)=\xi_i+\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)\mathbf{X}=0$, где i=1;2 и $(\mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{a}_i, \xi_i)$ – координаты вектора ξ_i в (U,φ). $\xi_1+\xi_2\in H_X$ тогда и только тогда, когда $\vartheta(\xi_1+\xi_2)=\xi_1+\xi_2+\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{X}=0$. Таким образом, $\vartheta(\xi_1+\xi_2)= =\vartheta(\xi_1)+\vartheta(\xi_2)$, т.е. $\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)= \mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_1)+\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_2)$. Анологично доказывается, что $\mathbf{e}(\mathbf{x}, l\mathbf{a})=l\mathbf{e}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ тогда и только тогда, когда $l\cdot H=H$, где $l\in IR$. □

Итак мы пришли к следующему инвариантному определению связности в терминах распределений на E :

<u>Определение 2.4.</u> Связностью в векторном расслоении E называется подрасслоение двойного расслоения TE, расщепляющее (2.1).

3. Геометрический смысл тензора кручения в терминах кокасательного расслоения.

Пусть ∇ – связность, а (U, φ) – тривиализация в расслоении E. Тогда на U определена тривиальная связность ∇^{φ}, которая задается равенством $\nabla^{\varphi}{}_X s=(Xf^i)s_i$, где s_i – локальный базис сечений, отвечающий тривиализации φ, и $s=f^i s_i$. Далее, на U определен тензор Кристоффеля Γ задаваемый равенством:

$$(3.1)\quad \Gamma = \nabla - \nabla^{\varphi}.$$

Пусть ∇^* – сопряженная связность, а φ^* тривиализация сопряженного расслоения E^* отвечающая тривиализации φ. Имеет место следующая

<u>Лемма 3.1.</u> i) Тривиальная связность отвечающая тривиализации φ^* сопряжена связности ∇^{φ}, т.е. имеет место равенство $(\nabla^{\varphi})^*=\nabla^{\varphi *}$.

ii) Если через Γ^* обозначить тензор Кристоффеля связности ∇^*, то операторы $\Gamma(X)$ и $-\Gamma^*(X)$ – сопряжены :

$$(3.2)\quad \Gamma(X)^* = -\Gamma^*(X).$$

<u>Доказательство</u>. i) Согласно определениям имеем :

$$\langle \nabla^{\varphi^*}_X \alpha\,, Y\rangle = (X\alpha_i)Y^i$$

$$\langle (\nabla^{\varphi})^*_X \alpha\,, Y\rangle = X\langle \alpha\,, Y\rangle - \langle \alpha\,, \nabla^{\varphi}_X\rangle = X(\alpha_i Y^i) - \alpha_i(XY^i) =$$

$$= (X\alpha_i)Y^i + \alpha_i(XY^i) - \alpha_i(XY^i) = (X\alpha_i)Y^i = \langle \nabla^{\varphi^*}_X\,, Y\rangle$$

ii) Учитывая i) и вспоминая определение Γ и Γ^* можно написать :

$$\langle \Gamma^*(X,\alpha), Y\rangle = \langle(\nabla^*_X - \nabla^{\varphi^*}_X)\alpha, Y\rangle = \langle\nabla^*_X\alpha, Y\rangle - \langle\nabla^{\varphi^*}_X\alpha, Y\rangle =$$

$$= X\langle\alpha, Y\rangle - \langle\alpha, \nabla_X Y\rangle - \langle\nabla^{\varphi^*}_X\alpha, Y\rangle = (X\langle\alpha, Y\rangle - (\langle\alpha, \nabla^{\varphi}_X Y\rangle + \langle\nabla^{\varphi^*}_X\alpha, Y\rangle)) - \langle\alpha, \Gamma(X,Y)\rangle =$$

$$= X\langle\alpha, Y\rangle - X\langle\alpha, Y\rangle - \langle\alpha, \Gamma(X,Y)\rangle = -\langle\alpha, \Gamma(X,Y)\rangle$$

что и доказывает ii). □

Пусть теперь H – связность на многообразии M, H^* – сопряженная связность в T^*M. Пусть также Γ – тензор Кристоффеля H в некоторой системе координат (U, x^i), Γ^* – тензор Кристоффеля H^*, а $H^{*\perp}$ – распределение ортогональное к H^* в канонической симплектической структуре на T^*M, (т.е. $H^{*\perp}{}_p$ есть ортогональное дополнение к $H^*{}_p$ в симплектическом пространстве T_pT^*M, $p \in T^*M$.)

<u>Теорема 3.2.</u> $H^{*\perp}$ является связностью с тензором Кристоффеля $\Gamma^{*\perp}$ определяемым по формуле:

$$(3.3)\quad \Gamma^{*\perp}(\alpha) = (\Gamma^*(\alpha))^*,$$

где α – произвольная линейная форма.

Поясним (3.3): $\Gamma^*(\alpha)$ является оператором (над U) из расслоения TM в T^*M. Сопряженный оператор $(\Gamma^*(\alpha))^*$ действует из $T^{**}M$ в T^*M и, в силу отождествления $T^{**}M = TM$, $(\Gamma^*(\alpha))^*$: $TM \to T^*M$, там же по определению должен действовать $\Gamma^{*\perp}(\alpha)$.

<u>Доказательство</u>. Прежде всего отметим, что, если (L,ω) – симплектическое пространство, то L^* каноническим образом наделяется симплектической структурой; соответствующую форму будем обозначать той же буквой ω. Временно обозначим коэффициенты тензора Γ^* через $\Gamma^i{}_{jk}$. Для распределений H^* и $H^{*\perp}$ найдутся 1-формы θ^i и ϑ^i такие что :

$$(3.4)\quad \theta^i = dp^i + \Gamma^i{}_{jk}\, p^j\, dx^k$$

$$(3.5)\quad \vartheta^i = dp^i + e^i{}_k\, dx^k,$$

где p^i – координаты в базисе dx^i, $e^i{}_k$ – некоторые гладкие функции на T^*U (см. [5]) . Ввиду ортогональности H^* и $H^{*\perp}$ все формы θ^i ортогональны всем формам ϑ^i в индуцированной симплектической структуре:

$$(3.6)\quad \Omega(\theta^i;\, \vartheta^{i'}) = 0,$$

где Ω – симплектическая форма на T^*M. С другой стороны, согласно (3.4), (3.5) имеем:

$$\Omega(\theta^i;\, \vartheta^{i'}) = \Omega(dp^i;\, dp^{i'}) + e^{i'}{}_{k'}\,\Omega(dp^i;\, dx^{k'}) +$$
$$+\, \Gamma^i{}_{jk}\, p^j\, \Omega(dx^k;\, dp^{i'}) + \Gamma^i{}_{jk}\, p^j\, e^{i'}{}_{k'}\Omega(dx^k;\, dx^{k'}).$$

Здесь первое и четвертое слагаемые равны нулю, кроме того: $\Omega(dx^k; dp^m)=-\delta^{km}$. Отсюда : $\Omega(\theta^i;\, \vartheta^{i'})=e_i{}^{i'}- \Gamma^i{}_{ji'}\, p^j$. А ввиду (3.6) из последней формулы получаем $e_i{}^{i'} = \Gamma^i{}_{ji'}\, p^j$. Итак функции $e^i{}_k$ линейны по p^j, т.е. можно написать $e^i{}_k = \overline{\Gamma}^i{}_{jk}\, p^j$. Сравнивая две последние формулы получим $\overline{\Gamma}^i{}_{jk} = \Gamma^k{}_{ji}$. Эта формула есть просто координатная форма записи равенства (3.3). □

Рассмотрим четверку связностей : H, H^*, $H^{*\perp}$, $(H^{*\perp})^*$. Введем обозначения : $H^{*\perp}=H'$, $(H^{*\perp})^*=H''$. Итак H и H'' – связности в TM, а H^* и H' – в T^*M. Соответствующие ковариантные производные обозначим ∇, ∇^*, ∇', ∇''. Тогда определены тензоры $\nabla - \nabla'' \in T^*M\otimes T^*M\otimes TM$; $\nabla^*-\nabla' \in T^*M\otimes TM\otimes TM$. Имеет место следующая

<u>Теорема 3.3.</u> i) Имеет место равенство :

$$(3.7)\quad \nabla - \nabla'' = T,$$

где T – тензор кручения ∇.

ii) Связь между тензорами T и T^* дается формулой :

$$(3.8)\quad T^*(X) = -T(X)^*,$$

где $X \in TM$.

Доказательство. i) Фиксируем систему координат (U,x^i) и обозначим тензоры Кристоффеля наших связностей через Γ, Γ^*, Γ', Γ'' соответственно. Согласно формуле (3.2) имеем :

$$(3.9)\quad \langle \Gamma^*(X,\alpha);Y\rangle = -\langle \alpha,\Gamma(X,Y)\rangle$$

$$(3.10)\quad \langle \Gamma'(X,\alpha);Y\rangle = -\langle \alpha,\Gamma''(X,Y)\rangle$$

Кроме того формулу (3.3) можно переписать в виде :

$$(3.11)\quad \langle \Gamma'(X,\alpha);Y\rangle = \langle \Gamma^*(Y,\alpha);X\rangle$$

Подставляя (3.11) и (3.9) последовательно в (3.10), получим :

$$\langle \alpha;\Gamma''(X,Y)\rangle = -\langle \Gamma'(X,\alpha);Y\rangle = -\langle \Gamma^*(Y,\alpha);X\rangle = \\ = \langle \alpha;\Gamma(Y,X)\rangle$$

Таким образом :

$$\Gamma''(X, Y) = \Gamma(Y, X)$$

Согласно определению тензора Кристоффеля, можем написать:

$$(\nabla - \nabla'')(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla''_X Y = (\nabla^\varphi{}_X Y+\Gamma(X,Y)) - (\nabla^\varphi{}_X Y+\Gamma''(X,Y))=$$

$$= \Gamma(X, Y) - \Gamma''(X, Y) = \Gamma(X, Y) - \Gamma(Y, X) = T(X, Y).$$

ii) Формула (3.8) получается очевидной выкладкой :

$$\langle T^*(X,\alpha); Y\rangle = \langle \nabla^*{}_X\alpha, Y\rangle - \langle \nabla'_X\alpha, Y\rangle = X\langle \alpha, Y\rangle - \langle \alpha, \nabla_X Y\rangle -$$

$$- X\langle \alpha, Y\rangle + \langle \alpha, \nabla'_X Y\rangle = \langle \alpha, (\nabla'_X - \nabla_X)Y\rangle = - \langle \alpha, T(X,Y)\rangle. \square$$

Таким образом, “новый” инвариант T^* по сути не дает ничего нового.

Теперь докажем формулы анонсированные во введении.

Лемма 3.4. Имеют место равенства :

$$\text{i) } \nabla''_X Y = \nabla_Y X + [X,Y]$$

$$\text{ii) } \langle \nabla'_X\alpha, Y\rangle = \langle \nabla^*{}_Y\alpha, X\rangle + d\alpha(X,Y)$$

Доказательство. Формула i) сразу следует из (3.7) и хорошо известного выражения для тензора кручения, часто принимаемого за определение :

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Равенство же ii) проверяется формальной выкладкой :

$$\langle \nabla'_X\alpha; Y\rangle = X\langle\alpha; Y\rangle - \langle\alpha; \nabla''_X Y\rangle = X\langle\alpha; Y\rangle - \langle\alpha; \nabla_Y X\rangle -$$

$$- \langle\alpha; [X,Y]\rangle = (X\langle\alpha; Y\rangle - Y\langle\alpha; X\rangle - \langle\alpha; [X,Y]\rangle) + Y\langle\alpha; X\rangle - \langle\alpha; \nabla_Y X\rangle =$$

$$= d\alpha(X, Y) + \langle\nabla^*_Y\alpha; X\rangle. \square$$

Таким образом, мы полностью описали связи между операторами ∇, ∇^*, ∇', ∇''. Их можно изобразить так :

$$\begin{tikzcd} \nabla \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \nabla^* \arrow[d, leftrightarrow] \\ \nabla'' \arrow[r, leftrightarrow] & \nabla' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \nabla \arrow[r, leftrightarrow, dotted] \arrow[d, leftrightarrow] & \nabla^* \arrow[d, leftrightarrow] \\ \nabla'' \arrow[r, leftrightarrow, dotted] & \nabla' \end{tikzcd},$$

где горизонтальные стрелки – суть переходы к сопряженной связности, а вертикальные стрелки описаны в Лемма 3.4.

Аналогичная картина для распределений H, H^*, H', H'' осталась неполной:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, leftrightarrow, "?"] \arrow[d, leftrightarrow, "?"] & H^* \arrow[d, leftrightarrow] \\ H'' \arrow[r, leftrightarrow, "?"] & H' \end{tikzcd}.$$

Здесь мы описали лишь правую вертикальную стрелку (см. Теорема 3.2). О горизонтальных стрелках можно сказать следующее: связности на E находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями в расслоении реперов R(E) (соответствующую геометрическую конструкцию см. [5]), а $R(E) \cong R(E^*)$. Этим мы и ограничимся. Опишем теперь левую вертикальную стрелку. Для этой цели воспользуемся канонической инволюцией s второго касательного расслоения, которая определяется так (см. [6]):

<u>Предложение-определение 3.5.</u> Существует единственный морфизм s расслоений:

$$\begin{tikzcd} TTM \arrow[rr, leftrightarrow, "s"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & TTM \arrow[dl, "d\pi"] \\ & TM & \end{tikzcd}$$

,

такой что: i) $s^2 = 1_{TTM}$; ii) для любой гладкой функции f на M $d(df)\circ s = d(df)$. □

Ясно, что при действии s подрасслоения двойного расслоения TTM переходят в подрасслоения. Для связностей имеет место

<u>Теорема 3.6.</u> Если H – связность на M, тогда s(H) также связность. Более того, имеет место равенство s(H) = H".

<u>Доказательство</u>. Пусть (U,x^i) – система координат на M и Γ – тензор Кристоффеля связности H. Тогда H (над U) состоит из векторов с координатами $(\mathbf{x},\mathbf{X};\mathbf{Y}, -\Gamma^i_{jk}X^jY^k)$. Инволюция s в координатах имеет вид s: $(\mathbf{x},\mathbf{X};\mathbf{Y},\xi) \mapsto (\mathbf{x},\mathbf{Y};\mathbf{X},\xi)$. Из этого можно заключить, что s(H) состоит из векторов вида $(\mathbf{x},\mathbf{Y};\mathbf{X}, -\Gamma^i_{jk}X^jY^k)$, т.е. символы Кристоффеля связности s(H) суть Γ^i_{kj} и совпадают с символами Кристоффеля связности H". □

ЛИТЕРАТУРА.

1. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ.–М.: Гостехиздат, 1967.–664 с.

2. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом.– М.: Мир, 1971 г.–343 с.

3. Лумисте Ю. Г. Теория связностей в расслоенных пространствах.// Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия.–1971.–с. 123-168.

4. Шапуков Б. Н. Связности на дифференцируемых расслоениях.// Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.–1983.–15.–с. 61-93.

5. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия.– М.: Наука, 1988 г.–496 с.

6. К. Годбийон. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.– М.: Мир, 1973 г.–188 с.

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ.

Григорьянц А. А.
Государственный Инженерный Университет Армении, г. Ереван

Классический линейный дифференциальный оператор (далее д.о.) D в частных производных обладает следующим фундаментальным свойством локальности: для любой функции f значение функции Df в произвольной точке x зависит лишь от значения функции f в сколь угодно малой окрестности точки x. Мы приводим аналогичный результат для д.о. в категории модулей над коммутативной алгеброй. Таким образом, устанавливается, что свойство локальности имеет чисто алгебраическую природу. Получено также обобщение свойства локальности, состоящее в том что любой д.о. может естественно рассматриваться как оператор, определенный на ростках (в классическом случае ростков гладких функций эти два свойства совпадают). С помощью обобщенного свойства локальности строится, обращение естественного морфизма функторов джетов, возникающего при замене колец (см. [1]), в случае перехода к локализации данного кольца.

Пусть k – коммутативное кольцо с единицей, A – коммутативная k-алгебра с единицей; P, Q – A-модули, $\mathrm{Hom}_k(P, Q)$ (соответственно $\mathrm{Hom}_A(P, Q)$) A-модуль k- (соответственно A-) линейных отображений из P в Q. A-модуль $\mathrm{Hom}_k(P, Q)$ обладает естественной структурой бимодуля. Введем скобку $[\Delta, f]\colon P \to Q$:

$$[\Delta, f](p) = \Delta(fp) - f\Delta p,$$

где $p \in P$. Таким образом скобка показывает отклонение правой структуры модуля от левой.

Введем по индукции модули $D_n(P, Q)$ д.о. порядка $\leq n$ из P в Q.

Определение 1. Положим:

i. $D_n(P, Q)=0$, при $n<0$;

ii. $D_n(P, Q)=\{\Delta \in \mathrm{Hom}_k(P,Q) \mid [\Delta, f] \in D_{n-1}(P, Q)$, для любого $f \in A\}$.

Соответствие $Q \mapsto D_n(P, Q)$ продолжается до представимого функтора в категорию A-бимодулей. Представляющий объект этого функтора (обозначение: $J^n(P)$) называется модулем джетов порядка $\leq n$ модуля P. Соответствие $P \mapsto J^n(P)$ продолжается до функтора в категорию A-бимодулей.

Кольцо (точнее: A-алгебру) частных кольца A (соответственно модуль частных A-модуля P) относительно мультипликативного подмножества $S \subset A$ обозначим AS^{-1} (соответственно PS^{-1}).

Пусть $\tau = \tau_P\colon P \to PS^{-1}$, $\tau_P\colon p \mapsto p/1$ – каноническое отображение локализации и $\Delta \in D(P, Q)$.

Теорема 1. ***(Слабое свойство локальности)*** Если $\tau_P(p) = 0$, то $\tau_Q(\Delta p) = 0$, где $p \in P$.

Другими словами, “росток” значения д.о. на элементе p зависит только от “ростка” элемента p.

Теорема 2. ***(Обобщенное свойство локальности)*** Для любого оператора $\Delta \in D_n(P, Q)$, существует единственный оператор $\Delta' \in D_n(PS^{-1}, QS^{-1})$, такой что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\tau_P"'] & Q \arrow[d, "\tau_Q"] \\ PS^{-1} \arrow[r, "\Delta'"] & QS^{-1} \end{tikzcd}$$

Для любого модуля P введем в рассмотрение модули $J^n(PS^{-1})$ и $(J^n(P))S^{-1}$. Из общей конструкции (см. [1, гл.1, §4]) следует, что существует естественный гомоморфизм $(J^n(P))S^{-1} \to J^n(PS^{-1})$. На самом деле этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Теорема 3. Функторы $J^n(-S^{-1})$ и $(J^n(-))S^{-1}$ естественно изоморфны.

Теорема 4. Имеют место следующие утверждения:

i) Отображение θ: $D_n(P, Q) \to D_n(PS^{-1}, QS^{-1})$, $\theta(\Delta) = \Delta'$, где Δ' – оператор из теоремы 2 – есть гомоморфизм *A*-модулей.
ii) Имеет место естественный морфизм μ: $D_n(PS^{-1}, QS^{-1}) \to D_n(P, Q)S^{-1}$.
iii) Если P – конечно представимый A-модуль, μ – изоморфизм.
iv) Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & D_n(P, Q) \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ D_n(PS^{-1}, QS^{-1}) \arrow[rr, "\mu"] & & D_n(P, Q)S^{-1} \end{tikzcd}$$

где τ – канонический гомоморфизм локализации.

Пункт iii) теоремы может быть высказан так: "росток" оператора есть оператор на "ростках".

ЛИТЕРАТУРА.

1. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин "Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений", Москва, "Наука", 1986 г.