1. Введение.

1.1 О геометрической теории дифференциальных уравнений.

Данная работа выполнена в русле недавно возникшей и ныне бурно развивающейся области математики, которую некоторые авторы называют геометрической теорией дифференциальных уравнений (далее ГТДУ). Объектом исследований этой области являются дифференциальные уравнения, но постановки задач и применяемые методы коренным образом отличаются от классических. Сам предмет рассмотрения характеризуется удачным замечанием Атьи, что раньше аналитики имели дело с общими операторами на простых многообразиях, а топологи и геометры – с простыми операторами на общих многообразиях, теперь же настала пора общих операторов на общих многообразиях.

ГТДУ находится на стыке многих математических дисциплин таких как дифференциальная геометрия, алгебраическая топология, гомологическая алгебра, алгебраическая геометрия, классическая теория дифференциальных и псевдодифференциальных операторов (далее д.о. и п.д.о.). По видимому, именно этим широким разнообразием используемых методов и понятий можно объяснить непопулярность (а порой и дискриминацию) ГТДУ в широких кругах математиков занимающихся классическими, традиционными разделами теории дифференциальных уравнений.

У истоков ГТДУ стоят такие выдающиеся математики как Дарбу, Ли и Картан (см. [1, 4, 13, 26]). Так подход Э. Картана к дифференциальным уравнениям как системам дифференциальных форм несколько отличается от принятого нами хотя онтологически и близок к нему.

В качестве неформального введения в идеи и методы ГТДУ, попробуем на одном элементарном примере очертить характер задач рассматриваемых этой теорией. Рассмотрим сперва простейшее уравнение первого порядка $y'=f(x)$. Предположим, что мы не можем проинтегрировать функцию $f(x)$. Как мы поступим? Можно заменить интегрирование многократным дифференцированием данного уравнения с последующим вычислением значения производных в некоторой фиксированной точке x_0. Так мы получим коэффициенты ряда Тейлора функции $f(x)$ и, при достаточной регулярности задачи, можем сколь угодно точно определить решение отвечающее любым начальным условиям. Точно также можно поступить с любой системой дифференциальных уравнений в частных производных. При этом на каждом шаге будет получаться система алгебраических уравнений, и необходимое условие существования решения – совместимость всех получающихся систем. В случае совместимости можно составить формальный степенной ряд (называемый формальным решением), для сходимости которого нужно обеспечить некоторые условия регулярности (но это уже иной круг задач). Попытка провести прямое вычисление в случае нетривиальных систем уравнений безнадежна. Встает чисто практическая задача определить (за конечное число шагов) существует или нет формальное решение. Первые результаты в этом направлении появились достаточно давно – в начале нашего века в работах французской школы (см., например, [5, 14]). Окончательное решение (в случае линейных систем) получено сравнительно недавно. Здесь следует отметить имена Спенсера и Голлдшмидта (см. [3, 36]). Хорошее изложение этого круга вопросов с максимальным приближением к языку классической теории дифференциальных уравнений можно найти в [33]. Тем не менее необходимо подчеркнуть, что оказалось невозможным обойтись без использования языка и средств дифференциальной геометрии и гомологической алгебры. Кратко можно описать результат Спенсера следующим образом: каждому оператору сопоставляется некоторый комплекс (так называемый комплекс Спенсера оператора), и доказывается что существование формального решения соответствующего уравнения эквивалентно ацикличности этого комплекса.

Еще одно из направлений исследований, ставшее уже классическим, можно охарактеризовать как изучение соотношений между аналитическими и алгебро-топологическими инвариантами некоторого класса операторов действующих на сечениях дифференцируемых векторных расслоений (имеется ввиду класс д.о. или п.д.о.). В связи с этим мы лишь упомянем такие выдающиеся имена как Ходж, Риман, Рох, Хирцебрух, Атья, Зингер, Ботт и другие, не останавливаясь подробно на результатах отмеченного направления (подробности см. в [32]).

Хотелось бы лишь сделать акцент на типичную для ГТДУ постановку задачи: изучение соотношений между алгебраическими и аналитическими свойствами д.о. Анализ показывает, что многие фундаментальные свойства д.о., привычно выражаемые в аналитических терминах, имеют чисто алгебраическую природу. В данной работе, в частности показано, что классическое свойство локальности д.о., которое может быть выражено так: для любой функции f значение функции Df (где D – произвольный линейный д.о.) в произвольной точке x зависит лишь от значения функции f в сколь угодно малой окрестности точки x (другими словами, от ростка f_x функции f в точке x); имеет алгебраическую природу, т.е., в частности, не зависит от топологии вещественной прямой. Заметим, что свойство локальности является определяющим свойством д.о., т.е. этим свойством д.о. выделяются из всех $\mathbb{R}$-линейных операторов на пространстве C^∞.

Интересно, что ГТДУ предоставляет адекватный язык для определения самого понятия д.о. Ведь нужно признать, что теория дифференциальных уравнений долгое время являлась исключительной математической дисциплиной, в том смысле, что всесторонне исследуемые ею объекты не имели удовлетворительного определения. Действительно, при рассмотрении, например, оператора Лапласа, часто наряду с декартовой системой координат приходится использовать полярную, при этом мы, конечно, не сомневаемся, что работаем с тем же самым оператором записанным в других координатах, хотя формальное следование любому из классических определений вынудит нас говорить о двух различных операторах.

В свете сказанного неудивительно, что различные попытки классификации в классической теории не привели к сколь-нибудь существенным результатам (чего не скажешь о ГТДУ, см., например, [30, 31]). В этом контексте примечательно высказывание Р. Куранта: "Вопросы, связанные с дифференциальными уравнениями в частных производных порядка выше первого, настолько разнообразны, что построение единой теории не представляется возможным" (см. [28]). Это действительно так в случае классического подхода.

Но несмотря на то, что методы, язык и круг задач ГТДУ и классической теории существенно отличаются, не нужно забывать о том, что объект исследований остается тем же и это дает повод надеяться на взаимное проникновение идей и методов двух теорий. В данной работе делается шаг в этом направлении. В классических терминах соответствующий результат может быть описан следующим образом: для произвольной системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (с переменными коэффициентами) получена система дифференциальных уравнений, решая которую можно найти такое преобразование системы координат, что преобразованная система уравнений будет иметь постоянные коэффициенты. Это позволяет, решая преобразованную систему, находить решения исходной.

В заключение, хотелось бы отметить, что сегодня, когда во всех областях математики так или иначе связанных с понятием производной происходит коренное изменение стиля, языка, идей и методов в связи с отходом от теоретико-множественных оснований с заменой их формализмом теории категорий, а также в связи с бурным развитием инвариантного языка и техники не опирающихся на фиксацию определенной системы координат, ГТДУ должна получить преимущественное право на существование перед классической теорией, вобрав в себя все лучшие достижения последней.

1.2 Обзор литературы.

Хорошее неформальное введение в ГТДУ можно найти в [15].

Зарождение идей и методов, которые легли в основу ГТДУ, можно проследить по работам [1, 4, 5, 13, 14, 26], а изложение полученных на основании их результатов в формальной теории интегрирования дано в работах [3, 33, 36].

Определение и основные свойства абстрактных д.о. в категориях модулей над произвольными коммутативными алгебрами впервые систематически изложены в монографии [20], до издания которой эти понятия вводились по мере надобности в статьях авторов монографии (см., например [16, 18, 19, 21, 23]). Несколько позже стали появляться работы, в которых абстрактные д.о. являются объектом исследований, а не вспомогательным средством (см. [20, 22]).

По исследованию естественных преобразований джет-функторов имеется много статей (см., например, [2, 6, 7, 9, 10]). Имеется также монография [8], в которой можно найти более подробную библиографию по этому вопросу. Правда, следует отметить, что во всех перечисленных работах рассматривается лишь классический случай расслоений джетов над гладким многообразием.

Вопрос о необходимости уяснения геометрического смысла тензора кручения ставится в [25]. Классическая интерпретация тензора кручения в терминах бесконечно малых петель дана в [35]. Попытка обобщить понятие тензора кручения на связности в произвольных расслоениях сделана в статье [11].

Об интерпретации связности, в случае дифференцируемых векторных расслоений, как расщепления точных джет-последовательностей (эта идея, по видимому, принадлежит Ботту) см. [32]. О других применениях связностей в ГТДУ можно получить представление по работам [12, 27]. О развитии теории связностей в последние десятилетия можно узнать по обзорам [29, 37].

Стиль и обозначения при изложении геометрических вопросов близки к [34]. В алгебраической части работы мы следуем [17] при изложении локальных вопросов, а также [20] при рассмотрениях связанных с модулями джетов и д.о. в модулях над абстрактными алгебрами.

1.3 Обзор полученных результатов и структуры диссертации.

В этом параграфе предлагается неформальное рассмотрение основных результатов диссертации, с указанием взаимосвязей между ними. Также очерчивается структура отдельных глав и работы в целом.

Глава 2 полностью посвящена теории д.о. в категории модулей. В качестве основных результатов главы 2, следует отметить следующие:

- описание модулей джетов, как фактормодулей по степеням ядра гомоморфизма умножения;
- доказательство теоремы локальности д.о.;
- выделение обобщенного свойства локальности д.о. и уяснение того факта, что классическое свойство локальности д.о. имеет алгебраическую природу (несмотря на то, что формулируется в терминах окрестностей).
- некоторые результаты технического характера.

В главе 3 развивается тензорное исчисление в произвольных категориях. При этом вводится понятие тензорной категории альтернативное существующему понятию моноидальной категории и показаны преимущества новой конструкции. Фундаментальное понятие полиморфизма в дальнейшем используется для определения символа д.о. (см. главу 4).

Предпринята попытка построения дифференциального исчисления в абстрактных категориях с единицей. Для функтора из категории с единицей в аддитивную категорию дифференциальное исчисление строится по аналогии со случаем категории модулей. При этом существенно используется понятие гомотетии, вводимое ранее при исследовании тензорных категорий и выражающее "меру линейности категории".

Кроме того, в начале главы вводятся основные категорные понятия, свободно используемые на протяжении всей работы.

Основные результаты главы:

- доказательство эквивалентности фундаментальных понятий предела функтора, универсального объекта и представляющего объекта;
- введение тензорных категорий;
- свойство тензорной единицы;
- свойства коммутативности и ассоциативности тензорных произведений;
- сравнение тензорных и моноидальных категорий;
- введение дифференциального исчисления на функторе из категории с единицей в аддитивную категорию.

В главе 4 исследуются вопросы связанные с понятием символа д.о., действующего из A-модуля P в A-модуль Q. Дело в том, что без введения дополнительных структур на модуле P возможно лишь определить так называемый главный символ д.о., который в классической интерпретации соответствует совокупности коэффициентов при частных производных высшего порядка. Интересное наблюдение состоит в том, что для определения полного символа д.о. (это и есть, по сути дела, классический д.о.) необходимо и достаточно введение связностей в касательном модуле основной алгебры A и в модуле P, что гораздо меньше требования введения локальной системы координат. Подобное рассмотрение позволяет говорить о связностях как о фундаментальных д.о., позволяющих определять полные символы всех д.о. Кроме того становится возможным ввести в рассмотрение класс д.о. с символом (ковариантно) постоянным относительно данной связности (что соответствует классическим операторам с постоянными коэффициентами). Но предлагаемый подход позволяет поставить вопрос о наличии для данного д.о. связности, относительно которой он имеет постоянный символ, т.е., в классических терминах, системы координат в которой данный оператор имеет постоянные коэффициенты. Эта задача, говоря классическим языком, сводится к совместимости одной линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

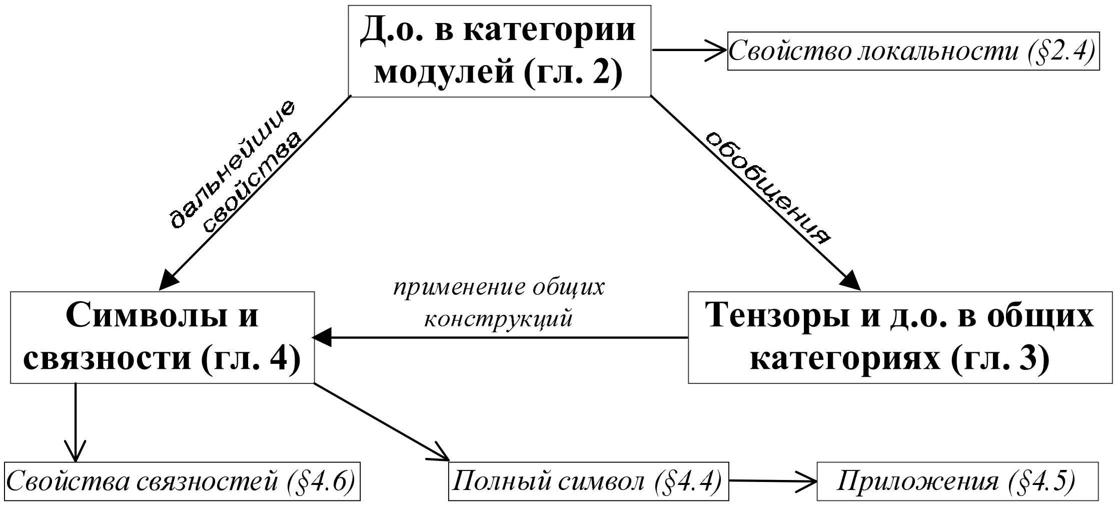
Как уже было отмечено, связности играют фундаментальную роль в теории абстрактных д.о., и, следовательно, исследование свойств инвариантов связностей само по себе представляет большой интерес. В этом направлении получено очень много результатов, ставших уже классикой дифференциальной геометрии. Но достаточно долго оставался открытым вопрос о геометрической интерпретации тензора кручения связности. Мы даем такую интерпретацию: тензор кручения выражает "меру нелагранжевости" распределения горизонтальных плоскостей, соответствующего сопряженной связности. Приведена также аналогичная интерпретация в терминах касательного расслоения. На основании предлагаемых конструкций дано новое определение связности.

Вкратце сформулируем основные результаты главы 4:

- результаты о расщеплении точных последовательностей джетов перенесены в категорию модулей над произвольными алгебрами;
- на их основании введено понятие полного символа д.о.;
- получена система дифференциальных уравнений, решая которую можно свести систему линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами;
- получена интерпретация тензора кручения в терминах симплектической структуры кокасательного расслоения;
- получена интерпретация тензора кручения в терминах касательного расслоения;
- дано новое определение связности.

Ввиду большого разнообразия используемых понятий и методов в работе отсутствует общий параграф, посвященный системе обозначений и вводу основных понятий. Необходимые определения даются в начале каждой главы и пополняются, по мере необходимости, в ходе изложения материала. Мы старались достичь замкнутости изложения и приводить все необходимые определения. Сделан упор на удобство специалиста ориентированного в классическом духе. В связи с этим мы стараемся приводить эвристические соображения и классические аналогии, оправдывающие те или иные абстрактные построения. Несмотря на то, что на протяжении всей работы свободно используется теоретико-категорный сленг, в своем месте (см. главу 3) мы приводим необходимые определения, имея ввиду опять-таки нужды классически ориентированного специалиста и формальную замкнутость изложения.

В заключение приведем примерную структурную схему работы:



В конце каждой главы сделана попытка обрисовать перспективы развития – углубления и обобщения – полученных результатов. Так ожидается доказательство теоремы обратной к теореме локальности д.о.; имеется возможность обобщения конструкции тензорных произведений с заменой "подложки" (категории множеств) произвольной категорией; особые надежды возлагаются на создание теории интегральных операторов, ассоциированных со связностью в касательном расслоении (с использованием экспоненты связности) для интегрирования операторов с постоянными коэффициентами относительно связности.

Основные результаты полученные в диссертации опубликованы в работах автора [40-44].

В заключении хочу выразить особую благодарность моему нынешнему руководителю Мирзояну Ване Александровичу, а также Айрапетяну Рубену Гургеновичу и Далаляну Самвелу Грантовичу, которые были моими руководителями на различных этапах подготовки данной работы. Так Р.Г. Айрапетян привлек мое внимание к красоте и логической завершенности идей и методов дифференциальной геометрии и убедительно показал преимущества инвариантного языка в сравнении с традиционными координатными рассмотрениями, а С.Г. Далаляну я обязан существенной поддержкой и руководством на пути изучения идей и методов теории категорий и формирования "категорного мышления", весьма необходимого в сложившейся в "модных" разделах современной математики ситуации практически полного вытеснения теоретико-множественного формализма.

2. Дифференциальное исчисление в категории модулей.

2.1 Введение к главе 2.

В этой главе исследуются локальные свойства дифференциальных операторов в категории модулей над коммутативной k-алгеброй A с единицей (где k – коммутативное кольцо с единицей). Формальному рассмотрению дифференциального исчисления в категории модулей мы предпошлем некоторые эвристические соображения, показывающие естественность вводимых понятий.

При вычислении значения д.о. D порядка n на функции f в данной точке x_0 используются только значения частных производных порядка $\leq n$ функции в точке x_0. Таким образом, можно сказать, что д.о. порядка n не различает не только функции совпадающие в некоторой окрестности точки (свойство локальности), но и функции имеющие в точке касание порядка выше n. Более точно, если две функции f и g имеют совпадающие частные производные порядка $\leq n$ в точке x_0, то $(Df)(x_0) = (Dg)(x_0)$ любого д.о. D порядка n. Таким образом, вместо рассмотрения ростка функции в точке x_0 (т.е. класса эквивалентности функции по следующему отношению эквивалентности: $f \sim g \Leftrightarrow$ существует окрестность U точки x_0, такая что $f = g$ на U), дающего совокупность значений всех частных производных функции в данной точке, достаточно рассматривать более узкий класс эквивалентности – касание до порядка n включительно – который и называется джетом (или струей) порядка n функции в точке.

Итак, переход от локального рассмотрения функции в окрестности точки к рассмотрению струи порядка n этой функции в точке соответствует отбрасыванию "хвоста" тейлоровского разложения (ненужного при рассмотрении операторов порядка $\leq n$), а струя порядка n в точке интерпретируется как совокупность значений частных производных порядка $\leq n$. Все струи порядка n в данной точке образуют линейное пространство – пространство струй (джетов). Джет – это гладкое отображение, сопоставляющее каждой точке элемент пространства джетов в этой точке. Джеты можно складывать и умножать на функции, т.е. определен модуль джетов над кольцом гладких функций. Джет функции сопоставляет каждой точке струю данной функции в этой точке. В частности, джет первого порядка дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_m)$, определенной на области $U \subset \mathbb{R}^m$ – есть вектор-функция определенная следующим образом:

$$j_1(f)(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}); \partial f(\mathbf{x})/\partial x_1, \dots, \partial f(\mathbf{x})/\partial x_m).$$

В отличие от джета функции, произвольный джет первого порядка – это просто гладкое отображение из U в $\mathbb{R}^{m+1}$. Итак, джет может быть интерпретирован как способ исключить из рассмотрения все "лишнее" при исследовании действия д.о. на функции.

Как уже отмечалось выше (см. главу 1), классический линейный д.о. D в частных производных обладает следующим фундаментальным свойством локальности: для любой функции f значение функции Df в произвольной точке x зависит лишь от значения функции f в сколь угодно малой окрестности точки x. В этой главе аналогичный результат получен для д.о. в категории модулей над коммутативной алгеброй. Таким образом, установлено, что свойство локальности имеет чисто алгебраическую природу. Заодно уточняется какое именно свойство в общей ситуации должно именоваться свойством локальности. Как обычно при попытке обобщения приходиться выбирать из нескольких классически эквивалентных вариантов. В данном случае получено обобщение классического свойства локальности, состоящее в том что любой д.о. может естественно рассматриваться как оператор, определенный на ростках (в классическом случае ростков гладких функций эти два свойства совпадают).

С помощью обобщенного свойства локальности строится, обращение естественного морфизма функторов джетов, возникающего при замене колец (см. [20]), в случае перехода к локализации данного кольца. Грубо говоря, показано, что “джет локализации есть локализация джета”. (Об исследованиях в области естественных преобразований джет-функторов см. [8], там же можно найти подробную библиографию). Кроме того, получен ряд результатов технического характера. В частности, дано описание модуля джетов с помощью ядра гомоморфизма умножения.

В заключение мы приводим сравнительную таблицу основных понятий и обозначений используемых в этой главе и соответствующих им инвариантных и неинвариантных аналогов.

Данная работа	Классическая аналогия (инвариантный язык)	Классическая аналогия (неинвариантный язык)
k – коммутативное кольцо с единицей.	$\mathbb{R}$– поле вещественных чисел.	$\mathbb{R}$– поле вещественных чисел.
A – коммутативная k-алгебра с единицей.	$C^{\infty}(M)$ – алгебра бесконечно дифференцируемых функций на гладком многообразии M.	$C^{\infty}(U)$ – алгебра бесконечно дифференцируемых функций на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$.
Spec(A) – множество простых идеалов кольца A.	Гладкое многообразие M.	Открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$.
P, Q – A-модули.	Модули гладких сечений векторных расслоений с базой M.	Модуль гладких вектор-функций из U в $\mathbb{R}^m$.

AS^{-1} – локализация кольца A.	Кольцо ростков гладких функций в точке многообразия.	Кольцо ростков гладких функций в точке открытого множества $U\subset\mathbb{R}^n$.
PS^{-1} – локализация модуля P.	Модуль ростков гладких сечений векторного расслоения в точке.	Модуль ростков гладких вектор-функций из U в $\mathbb{R}^m$ в точке.

Инвариантный язык (второй столбец) окончательно сложился во второй половине XX века и сейчас общеупотребителен, в третьем столбце использована обычная терминология вещественного анализа функций многих переменных. Для удобства восприятия можно все используемые ниже понятия заменять их классическими аналогами.

2.2 Обозначения и основные определения.

Пусть k – коммутативное кольцо с единицей, A – коммутативная k-алгебра с единицей; P, Q – A-модули. Гомоморфизм $\iota\colon k\to A$, $\iota(a)=a\cdot 1$ позволяет ввести на A-модуле структуру k-модуля, т.е. определяет функтор из категории Mod_A A-модулей в категорию Mod_k k-модулей, более не оговариваясь, мы всегда рассматриваем A-модули и как k-модули. Обозначим $\mathrm{Hom}_k(P, Q)$ (соответственно $\mathrm{Hom}_A(P, Q)$) A-модуль k- (соответственно A-) линейных отображений из P в Q. Имеется естественное включение $\mathrm{Hom}_A(P, Q)\subset\mathrm{Hom}_k(P, Q)$. A-модуль $\mathrm{Hom}_k(P, Q)$ обладает естественной структурой бимодуля с умножениями определяемыми формулами:

$$(f\theta)(p) = f(\theta(p)) \text{ и } (f\theta)(p) = \theta(fp),$$

где $\theta\in\mathrm{Hom}_k(P, Q)$, $p\in P$, $f\in A$.

Введем скобку $[\Delta, f]\colon P\to Q$:

$$[\Delta, f](p) = \Delta(fp) - f\Delta p,$$

где $p\in P$. Таким образом скобка показывает отклонение правой структуры модуля от левой. Кроме того $[\Delta, f]$ можно интерпретировать и как обычную операторную скобку, рассматривая f как оператор умножения на модулях P и Q.

Введем по индукции модули $D_n(P, Q)$ д.о. порядка $\le n$ из P в Q.

Определение 1. Положим:

i) $D_n(P, Q)=0$, при $n<0$;

ii) $D_n(P, Q) = \{\Delta\in\mathrm{Hom}_k(P,Q) \mid [\Delta, f]\in D_{n-1}(P, Q)$, для любого $f\in A\}$, $n\ge 0$.

Модуль $D_n(P, Q)$ называется модулем д.о. порядка $\le n$ из модуля P в модуль Q, а его элементы – дифференциальными операторами порядка $\le n$.

Следующие свойства модулей $D_n(P, Q)$ очевидны:

i) $D_n(P, Q)\subset D_m(P, Q)$, если $n\le m$

ii) $D_0(P, Q) = \mathrm{Hom}_A(P, Q)$.

Введем также в рассмотрение модуль:

$$D(P, Q) \overset{def}{=} \varinjlim D_m(P, Q).$$

Другими словами, $D(P, Q)$ – есть фильтрованный (би)модуль являющийся индуктивным пределом модулей $D_m(P, Q)$, проще говоря их объединением. Он называется модулем дифференциальных операторов. Скажем, что $\Delta \in D(P, Q)$ есть д.о. порядка n ($\deg(\Delta) = n$), если $\Delta \in D_n(P, Q) \setminus D_{n-1}(P, Q)$.

Соответствие $Q \mapsto D_n(P, Q)$ продолжается до представимого функтора в категорию A-(би)модулей. Представляющий объект этого функтора существует и называется модулем джетов порядка $\leq n$ модуля P (обозначение: $J^n(P)$). В частности, $J^0(P) \cong P$. Соответствие $P \mapsto J^n(P)$ продолжается до функтора в категорию А-бимодулей. Обозначим $J^n(A) = J^n$. Согласно определению представляющего объекта (см. определение 5, главы 3), $D_n(P, Q) \cong \mathrm{Hom}_A(J^n(P), Q)$ и существует такой д.о. $j_n : P \to J^n(P)$ порядка $\leq n$, что для любого $\Delta \in D_n(P, Q)$, найдется единственный A-гомоморфизм π_Δ: $J^n(P) \to Q$ для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "j_n"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ J^n(P) \arrow[rr, "\pi_\Delta"] & & Q \end{tikzcd}.$$

В частности при $\Delta = j_m$ при $m \leq n$ найдется единственный A-гомоморфизм π_{nm}: $J^n(P) \to J^m(P)$ замыкающий диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "j_n"'] \arrow[dr, "j_m"] & \\ J^n(P) \arrow[rr, "\pi_{nm}"] & & J^m(P) \end{tikzcd}.$$

Таким образом получается проективная система модулей $(J^n(P), \pi_{nm})$ проективный предел которой:

$$J(P) \overset{def}{=} \varprojlim J^n(P),$$

вобще говоря, не является представляющим объектом функтора $D(P, –)$. Необходимо отметить, что гомоморфизмы π_{nm} сюръективны. Действительно, элементы вида $j_m(p)$, порождающие модуль $J^m(P)$ принадлежат образу π_{nm}. Переход от $J^n(P)$ к $J^m(P)$ соответствует в классической интерпретации исключению из рассмотрения частных производных порядка от m+1 до n, элемент $j(p)$ модуля $J(P)$ есть аналог формального тейлоровского разложения функции. Заметим, что вопросы касающиеся сходимости или какой-либо регулярности формальных разложений не имеют алгебраических аналогий в рамках предлагаемых здесь конструкций.

Кольцо (точнее: A-алгебру) частных кольца A (соответственно модуль частных A-модуля P) относительно мультипликативного подмножества $S \subset A$ мы будем обозначать AS^{-1} (соответственно PS^{-1}). Напомним соответствующие определения (см. [17]). Мультипликативное подмножество S кольца A – это подмножество содержащее вместе с любыми двумя элементами их произведение. На множестве $A{\times}S$ введем отношение эквивалентности: $(a, s) \sim (a', s')$, если существует $h{\in}S$ такой, что $h(as' - a's) = 0$. Заметим, что это отношение эквивалентности выражает ни что иное как основное свойство дроби. Множество классов эквивалентности (обозначаемых a/s) наделяется естественным образом структурой кольца – это и есть кольцо AS^{-1}. Модуль PS^{-1} формально определяется соотношением:

$$PS^{-1} = P \otimes_A AS^{-1}.$$

Проще говоря, PS^{-1} – это в некотором смысле минимальный модуль получаемый из P, в котором умножения на элементы из S обратимы. Элементы этого модуля обозначают через p/s и работают с ними также как и с обыкновенными дробями. Заметим, что отображение:

$$\tau = \tau_P\colon P \to \mathrm{P}S^{-1},\ \tau_P\colon \mathrm{p} \mapsto \mathrm{p}/1$$

есть гомоморфизм A-модулей. Оно называется каноническим отображением локализации. Итак, можно сказать, что локализация относительно данного мультипликативного подмножества есть "допущение в знаменатель" элементов этого подмножества. Классический алгебраический пример: кольцо (поле) рациональных чисел есть локализация кольца целых чисел (в качестве S выступает подмножество ненулевых целых чисел). Но нам гораздо интереснее другой пример – локализация кольца непрерывных или гладких функций на многообразии. В качестве множества S выберем множество функций не обращающихся в 0 в некоторой точке x многообразия (или открытого подмножества $\mathbb{R}^n$). Тогда AS^{-1} есть кольцо ростков функций в точке x. Действительно, эквивалентность пар $(f, 1)$ и $(g, 1)$ означает, что существует функция h такая, что $h(x) \neq 0$ и $h(f - g) = 0$. А это означает, что $f = g$ в некоторой окрестности точки x. Каноническое отображение локализации в этом случае есть просто переход от функции к ее ростку в данной точке. Этот пример объясняет термин локализация кольца A применительно к кольцу AS^{-1}, и его всегда желательно иметь ввиду при рассмотрении абстрактных построений.

2.3 Некоторые свойства д.о. в категории модулей.

В первую очередь заметим, что для любого $\Delta \in \mathrm{Hom}_k(P, Q)$ имеет место равенство $[[\Delta, f], g] = [[\Delta, g], f]$, т.е. скобка симметрична относительно элементов кольца. Действительно, согласно тождеству Якоби, имеем:

$$[[\Delta, f\,], g] - [[\Delta, g\,], f] - [\Delta, [\,f, g]] = 0,$$

но $[\,f, g] = 0$, ввиду коммутативности умножения в A. Это утверждение, конечно же, распространяется по индукции на любое число элементов из A. Это оправдывает вводимые ниже обозначения.

Пусть $M = \{1,\ldots, m\}$ – множество первых m натуральных чисел. Введем мультииндексы $I = \{i_1,\ldots,i_k\} \subset M$, $I' = M \setminus I$. Пусть далее $f_i \in A$, $\Delta \in \mathrm{Hom}_k(P, Q)$. Введем обозначение:

$$\Delta_I = \Delta_{i_1\ldots i_k} = [\ldots[\Delta, f_{i_1}]\ldots f_{i_k}]$$

В частности, $\Delta_\varnothing = \Delta$, $\Delta_{\varnothing'} = \Delta_M$. Нам понадобится следующая простая лемма технического характера.

Лемма 1. Пусть $\partial \in \mathrm{Hom}_k(P, Q)$, $\Delta \in \mathrm{Hom}_k(Q, R)$, $f_i \in A$.

Тогда имеет место формула:

$$(\Delta \circ \partial)_M = \sum_{I \subset M} \Delta_I \circ \partial_{I'}\,. \tag{1}$$

Доказательство. Проведем индукцию по $|M|$. При $|M| = 1$ имеем:

$$\Delta\circ[\partial, f] + [\Delta, f]\circ\partial = (\Delta\circ\partial\circ f - \Delta\circ f\circ\partial\,) + (\Delta\circ f\circ\partial - f\circ\Delta\circ\partial\,) = [\Delta\circ\partial, f] \tag{2}$$

Пусть теперь $N = M \cup \{m+1\}$. Согласно предположению индукции можно написать:

$$(\Delta \circ [\partial, f_{m+1}])_M = \sum_{I \subset M} \Delta_I \circ \partial_{I' \cup \{m+1\}}$$

$$([\Delta, f_{m+1}] \circ \partial)_M = \sum_{I \subset M} \Delta_{I \cup \{m+1\}} \circ \partial_{I'}$$

Складывая два последних равенства, получим:

$$(\Delta \circ [\partial, f_{m+1}])_M + ([\Delta, f_{m+1}] \circ \partial)_M = \sum_{I \subset N} \Delta_I \circ \partial_{I'}$$

Раскрывая левую часть аналогично (2), получим:

$$(\Delta\circ[\partial, f_{m+1}])_M + ([\Delta, f_{m+1}]\circ\partial)_M = (\Delta\circ\partial\circ f_{m+1} - \Delta\circ f_{m+1}\circ\partial)_M +$$

$$+ (\Delta\circ f_{m+1}\circ\partial - f_{m+1}\circ\Delta\circ\partial\,)_M = ([\Delta\circ\partial, f_{m+1}]\,)_M = (\Delta\circ\partial)_N\,,$$

что завершает доказательство леммы. ◆

Из леммы, в частности, следует, что композиция двух дифференциальных операторов степеней $\le n$ и $\le m$ соответственно (если она определена), является оператором порядка $\le n + m$. Действительно, определение д.о. порядка $\le n$ означает что для любого набора элементов из A с набором индексов $M, |M| = n + 1$ имеет место равенство $\Delta_M = 0$. Если же теперь $|M| = n + m$, то все слагаемые левой части формулы (1) обращаются в 0.

Введем в рассмотрение A-бимодуль $A\otimes_k$P. Пусть $I_s(P)$ – означает подмодуль в $A\otimes_k P$, порожденный элементами вида $[...[a\otimes p, f_0]...f_s]$, где скобка определяется обычным образом:

$$[a\otimes p, f] = a\otimes fp - af\otimes p.$$

Известно, что имеет место канонический изоморфизм $J^n(P) \cong (A\otimes_k P)/I_n(P)$ (см. [20]). В частности, $J^n \cong (A\otimes_k A)/I_n$, где $I_n = I_n(A)$. Описание подмодуля I_n его порождающим множеством во многих отношениях неудобно. Формулируемая ниже теорема проясняет структуру I_n, а вместе с ним и J^n.

Заметим прежде всего, что $A\otimes_k A$ обладает естественной структурой A-биалгебры с умножением: $(a\otimes b)(c\otimes d) = ac\otimes bd$, а $A\otimes_k \mathrm{P}$ – структурой $A\otimes_k \mathrm{A}$-модуля. Пусть μ: $A\otimes_k \mathrm{A} \to A$, μ: $a\otimes b \mapsto ab$ – гомоморфизм умножения. Обозначим $\mathrm{K} = \ker\mu$, K^n – n-ая степень идеала K.

<u>Теорема 1.</u> Имеет место равенство: $I_n = \mathrm{K}^{n+1}$.

Доказательство. Теорема, очевидно, эквивалентна следующему утверждению: идеал K^n порождается как A-модуль элементами вида:

$$[...[1, f_0]...f_n],$$

где 1 – единица кольца $A\otimes_k \mathrm{A}$, $f_i \in A$.

Доказательство этого утверждения проведем индукцией по n. При $n = 0$ имеем: $f\otimes g\in\mathrm{K} \Rightarrow f\cdot g = 0 \Rightarrow f\otimes g = f(1\otimes g - g\otimes 1) = f\cdot[1, g]$, т.е., так как элементы вида $f\otimes g$ порождают K, $\mathrm{K}\subset I_0$. И обратно, очевидно, что элементы вида $[1, g]$ содержатся в K. Итак, $\mathrm{K} = I_0$. Легко видеть, что для любых элементов a, $b \in A\otimes_k \mathrm{A}$ имеют место равенства: $[ab, f] = a[b, f] = b[a, f]$. Пусть теперь $t = r\cdot s\in\mathrm{K}^{n+1}$, где $r\in\mathrm{K}^n$ и $s\in\mathrm{K}$. Тогда по предположению индукции:

$$r = \sum_i a_i([...[1, f_i^0]...f_i^{n-1}]$$

$$s = \sum_j b_j[1, g_j]$$

Откуда следует:

$$t = \sum_{i,j} a_i b_j([...[1, f_i^0]...f_i^{n-1}]\cdot[1, g_j]) = \sum_{i,j} a_i b_j([[...[1, f_i^0]...f_i^{n-1}]g_j]).$$

Таким образом, $\mathrm{K}^{n+1} \subset I_n$. Обратное включение очевидно. ◆

Согласно результату [20] предл. 1.2.3, теорема 1 проливает свет на структуру модуля $J^n(P)$.

Следующий простой результат является прямой переформулировкой свойства локальности д.о. на язык коммутативной алгебры.

<u>Теорема 2.</u> Для любого $\Delta\in D(P, Q)$. Если $\tau_P(\mathrm{p}) = 0$, то $\tau_Q(\Delta p) = 0$, где $\mathrm{p}\in P$.

Другими словами, “росток” значения д.о. на элементе p зависит только от “ростка” элемента p (τ_Q, τ_P – гомоморфизмы локализации).

Доказательство. Как известно (см. [17], стр. 82, предл. 4), равенство $\tau_P(\mathrm{p}) = 0$ означает, что существует $f \in S$, такой что $fp = 0$. Применим индукцию по $\deg(\Delta)$. При $\deg(\Delta) = 0$ утверждение очевидно. Далее, $\tau_Q([\Delta, f]p) = 0$ по предположению индукции, т.к. $\deg([\Delta, f]) = \deg(\Delta)-1$. С другой стороны:

$$\tau_Q([\Delta, f]p) = \tau_Q(\Delta(fp) - f\Delta(p)) = -\tau_Q(f\Delta p) = -\tau_A(f)\cdot\tau_Q(\Delta p).$$

Таким образом, $\tau_A(f)\cdot\tau_Q(\Delta p) = 0$, но $\tau_A(f)$ – обратимый элемент кольца AS^{-1}, откуда заключаем, что $\tau_Q(\Delta p) = 0$. ◆

2.4 Дифференциальные операторы и локализация.

Теорема 2 является простым следствием более общего результата, который по-видимому и должен именоваться свойством локальности д.о. Суть его в том, что любой д.о. может рассматриваться как оператор на "ростках" элементов модуля, т.е., в частности, совпадение "ростков" двух элементов приводит к совпадению "ростков" их образов. Обратимся к точным формулировкам.

Теорема 3. ***(Свойство локальности).*** Для любого оператора $\Delta\in D_n(P, Q)$, существует единственный оператор $\Delta'\in D_n(PS^{-1}, QS^{-1})$, такой что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\tau_P"'] & Q \arrow[d, "\tau_Q"] \\ PS^{-1} \arrow[r, "\Delta'"] & QS^{-1} \end{tikzcd} \qquad (3)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы нам потребуются следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $\Delta \in D_n(P, Q)$. Тогда для любого $g\in A$ и любого $p\in P$ имеет место формула:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_i^{n+1} g^{n+1-i}\Delta g^i p \equiv 0. \qquad (4)$$

если же g – обратимый элемент из A, то кроме того имеем:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i C_i^{n+1} g^{n+1-i}\Delta g^{i-1} p \equiv 0. \qquad (5)$$

для всех $p\in P$.

Доказательство. Согласно определению д.о. порядка n, имеем:

$$[[\Delta, \underbrace{g]\ldots g]}_{n+1} p \equiv 0 \qquad (6)$$

для всех $p\in P$, и для любого обратимого $g\in A$. Легко видеть, что (4) – это формула (6), записанная в раскрытом виде. Для доказательства (5) достаточно подставить в (4) $g^{-1}p$ вместо p. ◆

Как следствие получается формула:

$$g^{n+1}\Delta(g^{-1}p) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1} C_i^{n+1} g^{n+1-i}\Delta g^{i-1} p\,, \qquad (7)$$

являющаяся просто иной формой записи (5).

Для любого д.о. $\Delta \in D(P, Q)$, из существования продолжения Δ на PS^{-1} (т.е. из существования оператора Δ' замыкающего коммутативную диаграмму (3) вытекает его единственность, т.к. для элементов вида $p/g \in PS^{-1}$ должна выполняться формула (7), а, значит, образы элементов из PS^{-1} определены однозначно. Мы докажем существование Δ' по индукции. При $\deg \Delta = 0$, Δ' – это классическая локализация линейного отображения Δ. Пусть теперь доказано существование Δ' при $\deg \Delta = n$. Положим:

$$\Delta'(p/s) = \frac{\Delta(p) - [\Delta, s]'(p/s)}{s} \tag{8}$$

для $\Delta \in D_{n+1}(P, Q)$ и $s \in S$.

Докажем, что формула (8) корректно определяет отображение, замыкающее диаграмму (3).

Во-первых покажем, что имеет место равенство:

$$\frac{\Delta(p) - [\Delta, s]'(p/s)}{s} = \frac{\Delta(hp) - [\Delta, hs]'(p/s)}{hs}, \tag{9}$$

где h – любой элемент из S. Положим:

$$[\Delta, s]'(p/s) = q/s^{n+1},\ [\Delta, hs]'(p/s) = r/s^{n+1}, \tag{10}$$

где $q, r \in Q$ определяются равенством (7). Например:

$$q = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} [\Delta, s] s^{i-1} p. \tag{11}$$

Тогда с учетом (10), исходя из свойств модуля QS^{-1} (см. [17] гл. *II* §2, следствие 1) можно переписать (9) в виде:

$$t(s^{2n+3} h\Delta(p) - hs^{n+2} q) = t(s^{2n+3}\Delta(hp) - s^{n+2} r),$$

где t – некоторый элемент из S. Или в виде:

$$t' s^{n+1} [\Delta, h] p = t'(r - hq) \tag{12}$$

где $t' = ts^{n+2}$. Заметим, что последние два равенства – это равенства элементов из Q. Мы покажем, что на самом деле:

$$s^{n+1}[\Delta, h] p = r - hq$$

Действительно, раскрывая правую часть получим:

$$\begin{aligned} r - hq &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} [\Delta, hs](s^{i-1} p) - h \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} [\Delta, s](s^{i-1} p) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} \Delta(hs^i p) - hs \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} \Delta(s^{i-1} p) - \\ &- h \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} \Delta(s^i p) + hs \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} \Delta(s^{i-1} p) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} C_i^{n+1} s^{n+1-i} [\Delta, h](s^i p) \end{aligned} \tag{13}$$

Но, учитывая, что $\deg [\Delta, h] = n$, согласно (4), заключаем, что последнее выражение в (13) есть $s^{n+1}[\Delta, h]p$. Итак, равенство (9) доказано.

Пусть теперь $\alpha = p/s = p'/s'$ различные представления $\alpha \in PS^{-1}$, что, согласно определению, означает существование $t \in S$, такого, что $ts'p = tsp'$. Тогда, с учетом (9) можно написать:

$$\frac{\Delta(p) - [\Delta, s]'(\alpha)}{s} = \frac{\Delta(ts'p) - [\Delta, tss']'(\alpha)}{tss'} =$$
$$= \frac{\Delta(tsp') - [\Delta, tss']'(\alpha)}{tss'} = \frac{\Delta(p') - [\Delta, s']'(\alpha)}{s'}$$

Таким образом, формула (8) корректно определяет элемент $\Delta'(\alpha) \in QS^{-1}$. Очевидно, что Δ' замыкает диаграмму (3).

Автоматическая проверка показывает, что Δ' есть д.о. порядка $n+1$, т.е. $\deg \Delta' = \deg \Delta$. Это завершает доказательство теоремы. ◆

Для любого модуля P введем в рассмотрение модули $J^n(PS^{-1})$ и $(J^n(P))S^{-1}$.

<u>Теорема 4.</u> Функторы $J^nS^{-1}(-)$: $P \mapsto J^n(PS^{-1})$ и $S^{-1}J^n(-)$: $P \mapsto (J^n(P))S^{-1}$ естественно изоморфны.

Доказательство. Пусть F: $A \to B$ – гомоморфизм k-алгебр. Тогда, каждый B-модуль может быть рассмотрен как A-модуль: $a \cdot p = F(a)p$. Соответствующий функтор $\mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$, где Mod_A – категория A-модулей, будет также обозначаться через F. Как показано в [20] существует естественное преобразование функторов Φ: $FJ^n(-) \to J^nF(-)$. Теорема 4 фактически утверждает, что в случае $F = S^{-1}$, т.е. в случае перехода к локализациям, это преобразование является эквивалентностью.

Наше доказательство состоит в предъявлении обратного естественного преобразования. Согласно теореме 3, существует единственный д.о. j' порядка n, замыкающий коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "j_n"] \arrow[d] & J^nP \arrow[d] \\ PS^{-1} \arrow[r, "j'"] & (J^nP)S^{-1} \end{tikzcd} \qquad (14)$$

где j_n – канонический д.о. порядка n, а вертикальные стрелки суть отображения локализации. А согласно определению модулей джетов, существует единственное A-линейное отображение μ, замыкающее диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & PS^{-1} \arrow[dl, "j_n"'] \arrow[dr, "j'"] & \\ J^n(PS^{-1}) \arrow[rr, "\mu"] & & (J^nP)S^{-1} \end{tikzcd} \qquad (15)$$

С учетом результата из [20] (см. предл. 1.4.5.), можно составить следующую результирующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & PS^{-1} \arrow[dl, "j_n"'] \arrow[dr, "j'"] & \\
J^n(PS^{-1}) \arrow[rr, shift left, "\mu"] & & (J^nP)S^{-1} \arrow[ll, shift left, "\theta"] \\
 & J^nP \arrow[ul, "j_n(\tau)"] \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd} \qquad (16)$$

где τ – морфизм локализации для модуля J^nP, $j_n(\tau)$ – каноническое поднятие морфизма локализации для модуля P, θ – морфизм построенный в [20]. На самом деле, θ – есть гомоморфизм из свойства универсальности локализации (см. [17] гл. *II* §2, предл. 3) и, как таковой единственен.

Диаграмма (16) коммутативна. Действительно, чтобы убедиться в этом нужно проверить лишь равенства:

$$\theta\circ \mathrm{j}' = \mathrm{j}_n,\ \mu\circ \mathrm{j}_n(\tau) = \tau. \qquad (17)$$

Пусть $p\in P$, тогда можно написать:

$$[\mu\circ j_n(\tau)](j_n(p)) = \mu(j_n(\tau)(j_n(p))) = \mu(j_n(p/1)) =$$
$$= j'(p/1) = j_n(p)/1 = \tau(j_n(p)),$$

что доказывает второе из равенств (17), так как элементы вида $j_n(p)$ порождают J^nP. Аналогично, для первого равенства имеем:

$$\theta\circ j'(p/1) = \theta(j_n(p)/1) = \theta(\tau(j_n(p))) = j_n(\tau)(j_n(p)) = j_n(p/1).$$

Теперь, согласно (7), можно написать:

$$\theta(j'(p/s)) = \theta(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_i^{n+1}s^{-i}j'(s^{i-1}p/1)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_i^{n+1}s^{-i}\theta(j'(s^{i-1}p/1)) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}C_i^{n+1}s^{-i}j_n(s^{i-1}p/1) = j_n(p/s)$$

что доказывает первое из равенств (17).

Далее, $\mu\circ\theta = \mathrm{id}$ по свойству универсальности локализации, $\theta\circ\mu = \mathrm{id}$ по свойству универсальности джетов. Итак, θ – изоморфизм с обратным изоморфизмом μ. Теорема доказана. ◆

В заключение главы приведем некоторые следствия теорем 3 и 4. Во-первых заметим, что соответствие θ: $\Delta \mapsto \Delta'$ из теоремы 3 есть гомоморфизм A-модуля $D_n(P, Q)$ в A-модуль $D_n(PS^{-1}, QS^{-1})$.

Говорят, что A-модуль P – конечно представимый, если существует точная последовательность A-модулей:

$$L_1 \to L_0 \to P \to 0, \tag{18}$$

где A-модули L_1, L_0 – свободны и имеют конечные базисы. Заметим, что без условия конечности базисов последовательность (18) всегда существует.

Далее, из теоремы 4 вытекает, что если P – конечно представимый A-модуль, то A-модули $D_n(PS^{-1}, QS^{-1})$ и $D_n(P, Q)S^{-1}$ естественно изоморфны, т.е. изоморфны двуместные функторы:

$$D_n(–S^{-1}, –S^{-1}) \text{ и } D_n(–, –)S^{-1}.$$

Действительно, можно написать:

$$D_n(PS^{-1}, QS^{-1}) \cong \mathrm{Hom}_A(J^n(PS^{-1}), QS^{-1}) \cong \mathrm{Hom}_A((J^nP)S^{-1}, QS^{-1}) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_A((J^nP), Q)S^{-1} \cong D_n(P, Q)S^{-1}.$$

Мы использовали [17, гл. II, предл. 19]. Обозначим этот изоморфизм через μ. Подытожим сказанное диаграммой:

$$\begin{tikzcd} & D_n(P, Q) \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ D_n(PS^{-1}, QS^{-1}) \arrow[rr, "\mu"] & & D_n(P, Q)S^{-1} \end{tikzcd} \tag{19}$$

где τ – канонический гомоморфизм локализации. Легко видеть, что диаграмма (19) коммутативна. Таким образом, доказана

<u>Теорема 5.</u> Имеют место следующие утверждения:

i) Отображение θ: $D_n(P, Q) \to D_n(PS^{-1}, QS^{-1})$, $\theta(\Delta) = \Delta'$, где Δ' – оператор из теоремы 3 – есть гомоморфизм A-модулей.

ii) Имеет место естественный морфизм μ: $D_n(PS^{-1}, QS^{-1}) \to D_n(P, Q)S^{-1}$.

iii) Если P – конечно представимый A-модуль, μ – изоморфизм.

iv) Диаграмма (19) коммутативна.

Пункт iii) теоремы может быть высказан так: "росток" оператора есть оператор на "ростках".

2.5 Ожидаемые результаты.

Согласно теореме 3 д.о. в категории модулей обладают свойством локальности, выражаемым диаграммой (3). В доказательстве теоремы существенно используется тот факт, что $(n + 1)$-ая скобка оператора обращается в 0 (определение д.о. порядка n), так как в процессе доказательства утверждения соответствующего индуктивному шагу используются по существу все предыдущие шаги. Попытки обойти это обстоятельство оказались безрезультатными. Это наводит на мысль, что возможно свойство локальности является определяющим свойством д.о. в категории модулей (т.е. "критерием дифференциальности"), подобно тому как это имеет место в классическом случае.

Сформулируем соответствующий результат в виде гипотезы.

Гипотеза. Пусть $M(P, Q) \subset \mathrm{Hom}_k(P, Q)$ – некоторый подмодуль модуля k-линейных отображений из P в Q, функториально зависящий от P и Q (т.е. соответствие $M(-, -)\colon (P, Q) \mapsto M(P, Q)$ – двуместный функтор). Если для функтора M выполнены условия теоремы 5, включая существование соответствующих функторов, то $M(P, Q) \subset D(P, Q)$.

При формулировке гипотезы мы умышленно не наложили ограничений на модули P и Q, поскольку не ясно какие именно условия, кроме конечной представимости модуля P могут оказаться существенными. Результат полученный в рамках высказанной гипотезы по-видимому поставит окончательную точку в исследовании локальных свойств д.о. в категории модулей.

3. Тензорное исчисление в категориях.

3.1 Введение к главе 3.

В этой главе развивается тензорное исчисление в так называемых конкретных категориях, т.е. в категориях объекты которых имеют теоретико-множественную "подстилку". Конструкция использует "внутренний" подход, основанный на понятии полиморфизма – обобщении понятия полилинейного отображения, тензорное произведение вводится как представляющий объект функтора полиморфизмов. При этом, вводимые в определении симметрической моноидальной категории морфизмы ассоциативности, коммутативности и тензорной единицы, а также коммутативность диаграмм когерентности естественно вытекают из определений при условии наличии в категории дополнительной структуры. Эта структура (мы называем ее гомотетией), по всей видимости, представляет самостоятельный интерес и выражает “меру линейности“ категории. Кроме того, наше определение тензорного произведения проходит для семейств объектов произвольной мощности, чего не скажешь о моноидальной категории.

В качестве нетривиального нового примера полиморфизмов выступают полидифференциальные операторы (далее п.о.), использующиеся в следующей главе при определении символа. Чтобы показать важность для ГТДУ конструкции п.о., приведем цитату из [20]: "Если отбросить некоторые моменты имеющие чисто топологическую природу, то теория нелинейных д.о. соотносится с теорией линейных д.о. точно также, как тензорная алгебра с линейной. Поэтому логические истоки этой теории лежат в исчислении п.о. над заданной коммутативной алгеброй, играющей роль основной алгебры функций. Именно это обстоятельство предопределяет то ее единство, которое делает содержательным построение соответствующей общей теории. В этой книге(в [20] – *прим. авт.*) мы не могли позволить себе явным образом следовать этой точке зрения, так как ее реализация связана с хлопотливой разработкой алгебраической геометрии алгебр п.о…"

Таким образом, в настоящей главе, в частности, закладывается категорная основа полидифференциального исчисления, весьма важного для систематического изложения теории нелинейных д.о.

Следует еще раз подчеркнуть, что материал данной главы, без сомнения представляет самостоятельный интерес и может рассматриваться в отрыве от контекста полидифференциальной техники, являющей собой лишь один из примеров тензорного произведения: тензорное исчисление в категории модулей, морфизмы которой расширены до дифференциальных операторов.

В данной главе для удобства приводятся также определения основных категорных понятий, используемых на протяжении всей работы. При этом сделан акцент на то, что фундаментальные для всей математики понятия предела функтора, универсального объекта и представляющего объекта по существу эквивалентны (приведены соответствующие доказательства).

3.2 Основные понятия теории категорий.

Категория K состоит из класса объектов $\mathrm{Ob}(K)$ и класса морфизмов $\mathrm{Mor}(K)$. Причем:

i) $\mathrm{Mor}(K) = \coprod_{A,\, B \in \mathrm{Ob}(K)} \mathrm{H}_K(A, B)$, где $\mathrm{H}_K(A, B)$ – непересекающиеся подмножества в $\mathrm{Mor}(K)$, A и B пробегают $\mathrm{Ob}(K)$.

ii) Для любых $A, B, C \in \mathrm{Ob}(K)$ определено отображение:

$$\circ_{ABC} : \mathrm{H}_K(A, B) \times \mathrm{H}_K(B, C) \to \mathrm{H}_K(A, C)$$

такое что:

$\mathrm{ii_a}$) для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Mor}(K)$; если определены $\circ(\alpha, \beta)$ и $\circ(\beta, \gamma)$, то:

$$\circ(\circ(\alpha,\beta),\gamma) = \circ(\alpha, \circ(\beta, \gamma)) ;$$

$\mathrm{ii_b}$) для любого $A \in \mathrm{Ob}(K)$ найдется элемент $1_A \in \mathrm{H}_K(A, A)$ такой, что для любых $\alpha \in \mathrm{H}_K(A, B)$ и $\beta \in \mathrm{H}_K(B, A)$ ($B \in \mathrm{Ob}(K)$) имеют место равенства:

$$\circ(1_A, \alpha) = \alpha$$

$$\circ(\beta, 1_A) = \beta.$$

Класс $\mathrm{Ob}(K)$ называется классом объектов категории K, а класс $\mathrm{Mor}(K)$– классом морфизмов. Элемент φ множества $\mathrm{H}_K(A, B)$ называется морфизмом из объекта A в объект B и обозначается φ: $A \to B$ или $A\varphi B$. Отображение $\circ_{ABC}$ называется законом композиции. Элемент $\circ(\alpha, \beta)$ мы будем обозначать через $\beta\circ\alpha$ или $\alpha\beta$ (α: $A \to B$ и β: $B \to C$) и называть композицией последовательных морфизмов α и β. Морфизм 1_A называется тождественным морфизмом объекта A. Элементы множества $\mathrm{H}_K(A, B)$ называются параллельными морфизмами. Мы часто будем писать $\mathrm{H}(A, B)$ вместо $\mathrm{H}_K(A, B)$.

<u>Определение 1.</u> Морфизм α: $A \to B$ называется

i) изоморфизмом, если найдется $\beta \in \mathrm{Mor}(K)$ такой, что:

$\mathrm{i_a}$) $\alpha\beta = 1_A$

$\mathrm{i_b}$) $\beta\alpha = 1_B$;

ii) (ко)ретракцией, если выполнено $\mathrm{i_b}$ ($\mathrm{i_a}$);

iii) моно(эпи)морфизмом, если для любых $\beta, \gamma \in \mathrm{Mor}(K)$:

$$\beta\alpha = \gamma\alpha \;\Rightarrow\; \beta = \gamma$$

$$(\alpha\beta = \alpha\gamma \;\Rightarrow\; \beta = \gamma),$$

как только композиции определены ;

i∨) биморфизмом, если α и моно- и эпиморфизм ;

∨) (ко)постоянным морфизмом, если для любых $\beta, \gamma \in \mathrm{Mor}(K)$:

$$\beta\alpha = \gamma\alpha$$
$$(\alpha\beta = \alpha\gamma),$$

как только композиции определены.

Определение 2. Функтором Φ из категории K_1 в категорию K_2 (обозначение: $\Phi: K_1 \to K_2$), называется пара отображений:

$$\Phi_{\mathrm{Ob}}: \mathrm{Ob}(K_1) \to \mathrm{Ob}(K_2)$$
$$\Phi_{\mathrm{Mor}}: \mathrm{Mor}(K_1) \to \mathrm{Mor}(K_2)$$

(в дальнейшем мы пишем Φ вместо Φ_{Ob} или Φ_{Mor}) такие что:

i) $\alpha \in \mathrm{H}(A, B) \;\Rightarrow\; \Phi\alpha \in \mathrm{H}(\Phi(A), \Phi(B))$;

ii) $\Phi(1_A) = 1_{\Phi(A)}$, для любого $A \in \mathrm{Ob}(K_1)$;

iii) $\Phi(\alpha\beta) = \Phi(\alpha)\Phi(\beta)$, где $\alpha: A \to B$ и $\beta: B \to \mathrm{C}$ – произвольны.

Если вместо условий i), iii) имеют место:

i') $\alpha \in \mathrm{H}(A, B) \;\Rightarrow\; \Phi\alpha \in \mathrm{H}(\Phi(B), \Phi(A))$;

iii') $\Phi(\alpha\beta) = \Phi(\beta)\Phi(\alpha)$;

то мы говорим о кофункторе Φ.

Функтор Φ называется унивалентным, если Φ_{Mor} – вложение.

Пусть K – некоторая категория. Построим по ней новую категорию K^{op}: $\mathrm{Ob}(K^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(K^{\mathrm{op}})$, $\mathrm{H}_{\mathrm{op}}(A, B) = \mathrm{H}(B, A)$. Если $\alpha, \beta \in \mathrm{Mor}(K^{\mathrm{op}})$ – пара последовательных морфизмов, $\alpha\beta = \beta\alpha$, где справа композиция в K. Легко видеть, что так определенная композиция удовлетворяет аксиомам ii_a), ii_b) из определения категории. Категория K^{op} называется двойственной к категории K. Кофункторы из K это в точности функторы из K^{op}. Аналогичную двойственность можно усмотреть в пунктах ii), iii), v) определения 1, понятия введенные в пунктах i), iv) – самодвойственны. В дальнейшем мы определяем лишь одно из двух двойственных понятий, считая второе автоматически определенным с помощью перехода к двойственной категории. То же относится ко всем утверждениям. Другими словами, мы пользуемся следующей метатеоремой, выражающей принцип категорной двойственности: *Если в определении или теореме теории категорий обратить все стрелки, то полученное высказывание снова будет определением или теоремой теории категорий.*

Пусть $\Phi_{1,2}: K_1 \to K_2$ пара функторов из K_1 в K_2.

Определение 3. Естественным преобразованием Φ_1 в Φ_2 называется отображение:

$$h: \mathrm{Ob}(K_1) \to \mathrm{Mor}(K_2)$$
$$h: A \mapsto h_A$$

такое, что:

i) $h_A: \Phi_1(A) \to \Phi_2(A)$, для любого $A \in \mathrm{Ob}(K)$;

ii) коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \Phi_1(A) & \xrightarrow{h_A} & \Phi_2(A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_1(\alpha)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_2(\alpha)} \\ \Phi_1(B) & \xrightarrow{h_B} & \Phi_2(B) \end{array}, \qquad (1)$$

где α: $A \to B$ – произвольный морфизм из K_1.

Естественное преобразование называется эквивалентностью или изоморфизмом функторов, если все h_A – изоморфизмы.

Если h: $\Phi_1 \to \Phi_2$ и g: $\Phi_2 \to \Phi_3$ – естественные преобразования, то формула:

$$(hg)_A = h_A g_A$$

определяет преобразование hg: $\Phi_1 \to \Phi_3$, называемое композицией преобразований h и g.

<u>Определение 4.</u> i) Говорят, что K_1 изоморфна K_2, если найдется такая пара функторов Φ: $K_1 \to K_2$ и Ψ: $K_2 \to K_1$, что:

$$\mathrm{i_a})\ \Phi\Psi = 1_1\ ;$$

$$\mathrm{i_b})\ \Psi\Phi = 1_2,$$

где $\Phi\Psi$, $\Psi\Phi$ – композиции функторов, а 1_i – тождественный функтор из категории K_i в себя.

ii) Говорят, что K_1 эквивалентна K_2, если вместо равенств $\mathrm{i_a}$), $\mathrm{i_b}$) имеют место эквивалентности функторов.

Пусть K – произвольная категория и $A \in \mathrm{Ob}(K)$. Введем основной функтор, отвечающий объекту A:

$$\mathrm{H}^A\colon K \to \mathrm{Set};$$

$$\mathrm{H}^A(B) = \mathrm{H}_K(A, B),$$

$$\mathrm{H}^A(\varphi)\colon \mathrm{H}^A(B) \to \mathrm{H}^A(C),\ \mathrm{H}^A(\varphi)\colon \alpha \mapsto \alpha\varphi,$$

где Set – категория множеств и отображений; φ: $B \to C$, α: $A \to B$ – произвольные морфизмы. Двойственный объект называется основным кофунктором и обозначается H_A.

Пусть $\mathbf{H}^K$ – категория, объекты которой – основные функторы, а морфизмы – естественные преобразования. Легко видеть, что это действительно категория относительно введенной выше композиции преобразований. Соответствующую категорию кофункторов обозначим $\mathbf{H}_K$. Важность понятия основного функтора видна из следующей теоремы:

<u>Теорема 1.</u> Имеются следующие изоморфизмы категорий:

$$\mathrm{i})\ K \cong \mathbf{H}_K$$

$$\mathrm{ii})\ K^{\mathrm{op}} \cong \mathbf{H}^K$$

$$\mathrm{iii})\ \mathbf{H}_K \cong (\mathbf{H}^K)^{\mathrm{op}}.$$

Доказательство. iii) следует из i) и ii); сами же i) и ii) двойственны друг другу, поэтому достаточно доказать один из них, например, i). Для доказательства нам потребуется следующая лемма:

Лемма 1. (Ионеда). Для любого кофунктора Φ: $K \to \mathrm{Set}$ имеется биективное соответствие

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{H}_A, \Phi) \leftrightarrow \Phi(A),$$

где $\mathrm{Nat}(\mathrm{H}_A, \Phi)$ – множество (!) естественных преобразований из H_A в Φ.

Доказательство. Определим τ_1: $\mathrm{Nat}(\mathrm{H}_A, \Phi) \to \Phi(A)$ формулой:

$$\text{i) } \tau_1\colon h \mapsto h_A(1_A)$$

и τ_2: $\Phi(A) \to \mathrm{Nat}(\mathrm{H}_A, \Phi)$ формулой:

$$\text{ii) } \tau_2(a)_B\colon \varphi \mapsto [\Phi(\varphi)](a),$$

где φ: $B \to A$ – произволен, $h \in \mathrm{Nat}(\mathrm{H}_A, \Phi)$, $a \in \Phi(A)$. Поясним определение τ_2: $\tau_2(a)$ – естественное преобразование H_A в Φ, следовательно $\tau_2(a)_B$: $\mathrm{H}_A(B)=\mathrm{H}(B, A) \to \Phi(B)$; $\Phi(\varphi)$: $\Phi(A) \to \Phi(B)$, а, значит, $\Phi(\varphi)(a) \in \Phi(B)$. Нужно проверить корректность ii), т.е. доказать, что так определенное $\tau_2(a)$ действительно является естественным преобразованием. Пусть α: $B \to \mathrm{C}$, φ: $\mathrm{C} \to A$. Проверим коммутативность диаграммы (1):

$$[\Phi(\alpha)\circ\tau_2(a)_{\mathrm{C}}](\varphi) = [\Phi(\alpha)\circ\Phi(\varphi)](a) = \Phi(\alpha\varphi)(a),$$

$$[\tau_2(a)_B\circ\mathrm{H}_A(\alpha)](\varphi) = [\tau_2(a)]_B(\mathrm{H}_A(\alpha)\varphi) = [\tau_2(a)]_B(\alpha\varphi) = [\Phi(\alpha\varphi)](a).$$

Откуда:

$$\Phi(\alpha)\circ\tau_2(a)_{\mathrm{C}} = \tau_2(a)_B\circ\mathrm{H}_A(\alpha).$$

Итак, $\tau_2(a)$ – естественное преобразование. Далее:

$$(\tau_1\circ\tau_2)(a) = \tau_1(\tau_2(a)) = [\tau_2(a)]_A(1_A) = [\Phi(1_A)](a) = 1_{\Phi(A)}(a) = a$$

$$(\tau_2\circ\tau_1)(h) = \tau_2(h_A(1_A)) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; [(\tau_2\circ\tau_1)(h)]_B(\varphi) = [\tau_2(h_A(1_A))]_B(\varphi) = [\Phi(\varphi)](h_A(1_A)) = h_B(\varphi) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (\tau_2\circ\tau_1)(h) = h.$$

Таким образом, τ_1 и τ_2 взаимно обратные биекции. ◆

Применив лемму к случаю $\Phi = \mathrm{H}_B$, получим биекцию

$$\tau\colon \mathrm{Nat}(\mathrm{H}_A, \mathrm{H}_B) \to \mathrm{H}_B(A)=\mathrm{H}(A, B).$$

Теперь функтор H, осуществляющий изоморфизм i) задается так:

$$\mathrm{H}\colon A \mapsto \mathrm{H}_A\;;$$

$$\mathrm{H}\colon \varphi \mapsto \tau(\varphi),$$

на объектах и морфизмах соответственно. Функториальность соответствия H очевидна, что завершает доказательство теоремы. ◆

Теорема 1 по сути означает, что всякое высказывание о категории K может быть переведено на язык основных функторов. Например: α – мономорфизм тогда и только тогда, когда естественное преобразование $\tau(\alpha)$ – инъективно, т.е. инъективны все $\tau(\alpha)_A$; α – постоянный морфизм тогда и только тогда, когда $\tau(\alpha)$ – постоянно, т.е. все $\tau(\alpha)_A$ постоянны.

<u>Определение 5.</u> Функтор Φ: $K \to \mathrm{Set}$ называется представимым, если найдется такой объект A из K, что $\Phi \cong \mathrm{H}^A$, т.е. имеется по крайней мере одна эквивалентность функторов. Мы будем говорить, что Φ представлен объектом A, если фиксирован некоторый изоморфизм $\Phi \to \mathrm{H}^A$.

<u>Определение 6.</u> Объект T категории K называется терминальным, если $\mathrm{H}(A, T)$ – одноэлементное множество для любого $A \in \mathrm{Ob}(K)$.

Пусть K_1 и K_2 две категории и $A \in \mathrm{Ob}(K_2)$. Введем в рассмотрение постоянный функтор $\Theta(A)$: $K_1 \to K_2$:

$$\Theta(A):\ B \mapsto A,\ \varphi \mapsto 1_A,$$

где $B \in \mathrm{Ob}(K_1)$ и $\varphi \in \mathrm{Mor}(K_1)$. Заметим, что $\Theta(A)$ можно рассматривать и как кофунктор.

Пусть $\mathrm{pt} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ – одноэлементное множество. Объект T категории K терминален тогда и только тогда, когда кофункторы H_T и $\Theta(\mathrm{pt})$ изоморфны. Другими словами, терминальный объект – это, в точности, объект представляющий постоянный кофунктор $\Theta(\mathrm{pt})$. Двойственно определяется инициальный объект категории. Для терминальных и инициальных объектов мы будем использовать термин универсальный. Легко видеть, что универсальный объект определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма.

Теперь мы установим обратную связь, т.е. опишем представляющие объекты функторов в терминах свойства универсальности. Пусть Φ: $K \to \mathrm{Set}$ – некоторый функтор. Введем в рассмотрение категорию K_Φ:

$$\mathrm{Ob}(K_\Phi) = \coprod_{A \in \mathrm{Ob}(K)} \Phi(A)\ ;$$

$$\mathrm{H}(a, b) = \{\, f\colon A \to B /\ [\Phi(f)](a) = b\, \},$$

где $a \in \Phi(A)$, $b \in \Phi(B)$.

Легко видеть, что K_Φ – категория относительно индуцированной из K композиции. Имеет место следующая лемма:

<u>Лемма 2.</u> Функтор Φ представим тогда и только тогда, когда в K_Φ существует инициальный объект.

<u>Доказательство.</u> Пусть Φ представлен объектом A и h: $\mathrm{H}^A \to \Phi$ – соответствующий изоморфизм. Используя биекцию из леммы Ионеды, найдем $a_h \in \Phi(A)$ соответствующий h.

Для любого $b \in \Phi(B)$ найдется единственный f : $A \to B$ такой, что $h_B(f) = b$, но:

$$h_B(f) = [\tau_2(a_h)]_B(f) = [\Phi(f)](a_h)$$

(определение τ_2 см. в доказательстве леммы Ионеды). Обратное рассуждение аналогично. ◆

В частности, из леммы следует, что, если Φ представим объектом A, то пара $(A, a_h \in \Phi(A))$ единственна, с точностью до изоморфизма, т.е. для двух пар (A, a) и (A', a') найдется единственный изоморфизм g: $A \to A'$ такой, что $[\Phi(g)](a) = a'$. Назовем (A, a_h) представляющей парой функтора Φ.

Заметим, что соответствие Θ: $A \mapsto \Theta(A)$ очевидно продолжается до функтора, осуществляющего изоморфизм категорий K и категории постоянных функторов из K' в K и их естественных преобразований. Имея это ввиду, мы можем говорить о морфизмах $A \to \Phi$, где $A \in \mathrm{Ob}(K)$ и Φ: $K' \to K$ – произвольный функтор.

Введем в рассмотрение категорию K/Φ:

$$\mathrm{Ob}(K/\Phi) = \{\, A \to \Phi \mid A \in \mathrm{Ob}(K) \,\};$$

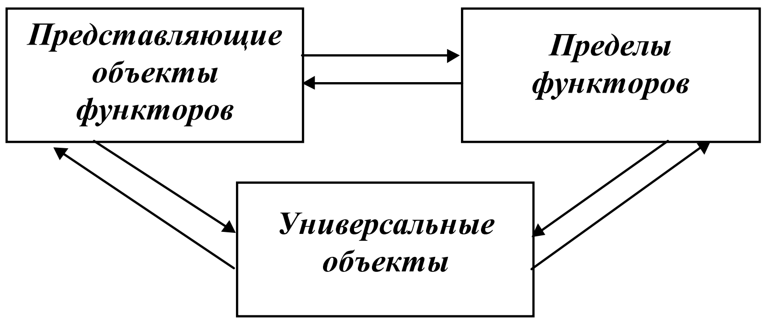
$$\mathrm{H}_{K/\Phi}(\varphi, \psi) = \{\, f: A \to B \mid f\psi = \varphi \,\},$$

где φ: $A \to \Phi$, ψ: $B \to \Phi$. (Напомним, что каждой стрелке f соответствует естественное преобразование $\Theta(A) \to \Theta(B)$, которое мы обозначили также через f.)

Определение 7. Терминальный объект категории K/Φ называется (обратным) пределом функтора Φ и обозначается $\mathrm{Lim}(\Phi)$.

Обратная связь между понятиями универсального объекта и предела устанавливается следующим очевидным замечанием: Терминальный объект категории K является пределом пустого функтора $\varnothing \to K$.

Наглядно поясним установленные связи между основными понятиями рисунком:



3.3 Полиморфизмы и тензорные произведения.

В этом параграфе вводится понятие функтора полиморфизмов, с помощью которого определяется произведение семейства объектов конкретной категории. Изучаются простейшие свойства вводимых понятий. Конкретная категория – это по сути категория в которой можно говорить о "множестве элементов" объекта, а соответствующий унивалентный функтор – это обычно так называемый стирающий или забывающий функтор, который, отбрасывая структуру объекта сопоставляет ему соответствующее множество элементов.

Определение 8. Пара $(K, |-|)$, где $|-|:K\to\mathrm{Set}$ – унивалентный функтор в категорию множеств, называется конкретной категорией.

Функтор $|-|$ будем называть стирающим по аналогии со стирающими функторами классических категорий теоретико-множественной математики. В дальнейшем вместо $(K, |-|)$ мы пишем K. Пусть $\mathbf{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ – семейство множеств (I – произвольное индексное множество) и $\boldsymbol{x}$: $\prod_{i\in I}A_i=\prod\mathbf{A}\to B$ – отображение и $\boldsymbol{a}\in\prod_{i\neq i'}A_i$.

Определение 9. Срезом $\boldsymbol{x}$ по $\boldsymbol{a}$ называется отображение $\boldsymbol{x_a}$: $A_{i'}\to B$, действующее по правилу: $A_{i'}\ni a' \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, a')$.

Пусть K – конкретная категория и C, B – объекты из K.

Определение 10. Отображение φ: $|C|\to|B|$ называется представимым, если существует морфизм $f{:}C\to B$ такой, что $|f|=\varphi$.

Пусть теперь $\mathbf{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ – семейство объектов конкретной категории K и B еще один объект из K.

Определение 11. Отображение $\boldsymbol{x}{:}\prod_{i\in I}|A_i|\to|B|$ называется полиморфизмом из $\mathbf{A}$ в B (обозначение: $\boldsymbol{x}{:}\mathbf{A}\to B$), если любой срез $\boldsymbol{x_a}$ представим.

Множество всех полиморфизмов из $\mathbf{A}$ в B обозначим через $\mathrm{P}(\mathbf{A}, B)$.

Лемма 3. Соответствие $B\mapsto \mathrm{P}(\mathbf{A}, B)$ продолжается до функтора $\mathrm{P}(\mathbf{A}, \text{-})$: $K\to \mathrm{Set}$.

Доказательство. Пусть $f: B\to C$ – произвольный морфизм. Определим

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}, f)\colon \mathrm{P}(\mathbf{A}, B)\to \mathrm{P}(\mathbf{A}, C)$$

следующим образом :

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}, f)\colon \xi\mapsto \xi|f|.$$

Имеем :

$$[\xi|f|]_{\mathbf{a}} = \xi_{\mathbf{a}}|f| = |\eta_{\mathbf{a}}||f| = |\eta_{\mathbf{a}}f|,$$

т.е. $[\xi|f|]_{\mathbf{a}}$ – представим для любого среза, а, значит, $\mathrm{P}(\mathbf{A}, f)$ – корректно определено. Далее :

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}, fg)(\xi) = \xi|fg| = [\xi|f|]|g| =$$
$$= [\mathrm{P}(\mathbf{A}, f)](\xi)|g| = [\mathrm{P}(\mathbf{A}, g)]([\mathrm{P}(\mathbf{A}, f)](\xi)),$$

т.е. :

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}, fg) = \mathrm{P}(\mathbf{A}, f)\,\mathrm{P}(\mathbf{A}, g).$$

Аналогично :

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}, 1_B)(\xi) = \xi|1_B| = \xi 1_{\mathrm{H}(\mathrm{E},B)} = \xi,$$

т.е. $\mathrm{P}(\mathbf{A}, 1_B) = 1_{\mathrm{P}(\mathbf{A}, B)}$, а, значит, $\mathrm{P}(\mathbf{A}, -)$ – функтор. ◆

Определение 12. Представляющая пара для функтора $\mathrm{P}(\mathbf{A}, -)$ (если она существует) называется тензорным произведением семейства объектов $\mathbf{A}$ и обозначается $(\otimes_{i\in I} A_i;\ \iota_{\mathbf{A}})$. Вместо $\otimes_{i\in I}A_i$ мы пишем также $\otimes\mathbf{A}$.

Мы часто называем тензорным произведением только представляющий объект, а вместо $\iota_{\mathbf{A}}$ пишем ι. Полиморфизм ι назовем каноническим.

В категориях групп и модулей с обычным стирающим функтором это определение приводит к классическим тензорным произведениям, аналогично обстоит дело в категориях векторных расслоений и пучков при соответствующем выборе функтора. В категории множеств с тождественным функтором тензорные произведения совпадают с декартовыми. Во всех перечисленных случаях существует единица тензорного произведения. Можно построить также весьма много интересных неклассических примеров, но нас будет интересовать только один из них – категория модулей со стирающим функтором, в которой класс морфизмов расширен до дифференциальных операторов. Полиморфизмы в этом случае называются полидифференциальными операторами. В своем месте мы докажем, что тензорные произведения в этой ситуации существуют и опишем их. Обратим внимание на то, что в случае п.о. тензорная единица, вообще говоря, отсутствует.

Разберем подробнее классическую ситуацию категории модулей. Пусть P – A-модуль, тогда $|\,P\,|$ – есть модуль P, рассматриваемый как множество (т.е. $|\,P\,|$ – множество элементов модуля P). Ввиду наличия произведений в Mod_A и перестановочности стирающего функтора с произведениями отображения:

$$\xi\colon \prod_i |\,P_i\,| \to |\,Q\,|$$

можно рассматривать как отображения $|\prod_i P_i\,| \to |\,Q\,|$. Условие представимости срезов попросту совпадает с условием полилинейности ξ.

Мы скажем, что K – категория с (конечными) тензорными произведениями, если для любого (конечного) семейства объектов из K существует тензорное произведение.

Пусть $\mathbf{K} = (K_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ – семейство категорий. Введем новую категорию $\prod\mathbf{K}$:

$$\mathrm{Ob}(\prod\mathbf{K}) = \prod \mathrm{Ob}(\mathbf{K}),$$
$$\mathrm{Mor}(\prod\mathbf{K}) = \prod \mathrm{Mor}(\mathbf{K}),$$

с покомпонентной композицией. $\prod\mathbf{K}$ – называется произведением категорий семейства $(K_i)_{i\in I}$. Функтор из $\prod\mathbf{K}$ называется I-местным функтором из $\mathbf{K}$, если все $K_i = \mathbf{K}$. В этом случае мы пишем K^I вместо $\prod\mathbf{K}$.

<u>**Лемма 4.**</u> Соответствие $\mathbf{A} \to \otimes\mathbf{A}$ продолжается до I-местного функтора:

$$\otimes\colon K^I \to K$$

на K.

Доказательство. Пусть

$$\varphi = \varphi_i : A_i \to B_i$$

семейство морфизмов, т.е. φ – морфизм в K^I. Рассмотрим композицию

$$\xi = [\prod|\varphi|]\iota_{\mathbf{B}}\colon \prod|\mathbf{A}| \to |\otimes\mathbf{B}|.$$

Утверждается, что $\xi\colon \mathbf{A} \to \otimes\mathbf{B}$ – полиморфизм. Действительно, пусть

$$\mathbf{s} \in \prod_{i\neq i'} |A_i| \quad \text{и} \quad s' \in |A_{i'}|,$$

тогда имеем:

$$\xi_{\mathbf{s}}(s') = [(\prod|\varphi|)\iota_{\mathbf{B}}]_{\mathbf{s}}(s') = [(\iota_{\mathbf{B}})_{\mathbf{s}}](s'|\varphi_{i'}|) = s'|\varphi_{i'}||\eta_{\mathbf{s}}| = s'|\varphi_{i'}\eta_{\mathbf{s}}|,$$

где $\eta_{\mathbf{s}}$ представляет $(\iota_{\mathbf{B}})_{\mathbf{s}}$. Значит, $\xi_{\mathbf{s}}$ представлен морфизмом $\varphi_{i'}\eta_{\mathbf{s}}$.

По определению 12 найдется единственный морфизм α_φ из $\otimes\mathbf{A}$ в $\otimes\mathbf{B}$ такой, что:

$$\iota_{\mathbf{A}}|\alpha_\varphi| = \xi = (\prod|\varphi|)\iota_{\mathbf{B}}.$$

Положим $\otimes(\varphi) = \alpha_\varphi$. Очевидно, что:

$$\otimes(1_{\mathbf{A}}) = 1_{\otimes\mathbf{A}}.$$

Если $\psi\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ – другое семейство морфизмов, то по определению 12 $\alpha_{\varphi\psi}$ – единственный морфизм удовлетворяющий условию:

$$\iota_{\mathbf{A}}|\alpha_{\varphi\psi}| = (\prod|\varphi\psi|)\iota_{\mathbf{C}},$$

но этому же условию удовлетворяет $\alpha_\varphi\alpha_\psi$, т.е.:

$$\otimes(\varphi\psi) = \otimes(\varphi)\otimes(\psi).\ \blacklozenge$$

Определение 13. Морфизм $\otimes\varphi$ называется тензорным произведением семейства морфизмов φ.

Пусть $\sigma\colon I \to I$ – биекция и $\pi\colon I \to J$ – сюръекция множеств. Обозначим:

$$\sigma\mathbf{A} = (A_{\sigma(i)})_{i\in I}\,; \quad I_j = \pi^{-1}(j)\,;$$
$$\mathbf{B}_j = (A_i),\ i \in I_j.$$

Теорема 2. i) Соответствие $\sigma\colon \mathbf{A} \mapsto \sigma(\mathbf{A})$ продолжается до функтора $\sigma\colon K^I \to K^I$.

ii) Найдется пара функторных изоморфизмов:

$$\sigma_1\colon \mathrm{P}(\mathbf{A}, -) \to \mathrm{P}(\sigma\mathbf{A}, -)$$
$$\sigma_2\colon \otimes \to \otimes\circ\sigma$$

таких, что индуцированная диаграмма изоморфизмов (двуместных) функторов коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P}(-,-) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{P}(\sigma(-),-) \arrow[d] \\
\mathrm{H}(\otimes-,-) \arrow[r] & \mathrm{H}(\otimes_\circ\sigma-,-)
\end{tikzcd},$$

где вертикальные стрелки суть представляющие изоморфизмы. (Пункт ii выражает свойство коммутативности тензорного произведения.)

iii) Существует функторный морфизм:

$$\sigma_3\colon \otimes_{i\in I} \to \otimes_{j\in J} \circ \prod_{j\in J} \otimes_{i\in I_j} .$$

Действие фуктора записанного справа от стрелки требует пояснения – сначала строятся объекты $\mathbf{B}_j = \bigotimes_{\pi(i)=j} A_i$, а затем рассматривается их тензорное произведение.

Пункт iii выражает (слабое) свойство ассоциативности тензорного произведения.

Доказательство. i) Это утверждение очевидно.

ii) Пусть:

$$f_\sigma\colon \prod |\mathbf{A}| \to \prod |\sigma\mathbf{A}|$$

биекция, отвечающая перестановке σ, тогда $f_\sigma\iota_{\sigma\mathbf{A}}$ – полиморфизм. Действительно, положим:

$$\mathbf{s} \in \prod_{i\neq i'} |A_i|$$

найдем:

$$\sigma\mathbf{s} = (s_{\sigma(i)})_{i\neq i''} \in \prod_{i\neq i''} |A_{\sigma(i)}|,$$

где $i'' = \sigma^{-1}(i')$. ($\sigma\mathbf{s}$ получается из $\mathbf{s}$ при изоморфизме

$$\sigma^*\colon \prod_{i\neq i'} |A_i| \to \prod_{i\neq i''} |A_{\sigma(i)}|$$

порожденном σ).

По определению

$$[f_\sigma\iota_{\sigma\mathbf{A}}]_{\mathbf{s}} = [\iota_{\sigma\mathbf{A}}]_{\sigma\mathbf{s}},$$

а, значит, представим. Пропуская $f_\sigma\iota_{\sigma\mathbf{A}}$ через $\iota_{\mathbf{A}}$ получим морфизм

$$\otimes\mathbf{A} \to \otimes\sigma\mathbf{A}.$$

Аналогично, для

$$f_\sigma^{-1} = f_{\sigma'}, \text{ где } \sigma' = \sigma^{-1}$$

строится морфизм

$$\otimes\sigma\mathbf{A} \to \otimes\mathbf{A},$$

очевидно, двусторонне обратный к предыдущему. Этим завершено построение изоморфизма

$$\sigma_2\colon \otimes \to \otimes\circ\sigma,$$

но оно, как легко видеть, содержит в себе и конструкцию для σ_1. Чтобы убедиться в этом заменим $\iota_{\sigma\mathbf{A}}$ произвольным полиморфизмом

$$\xi\colon \sigma\mathbf{A} \to B$$

и получим соответствие:

$$f_\sigma\colon \xi \mapsto f_\sigma\xi$$

$$f_\sigma\colon \mathrm{P}(\sigma\mathbf{A}, B) \to \mathrm{P}(\mathbf{A}, B)$$

с обратным отображением:

$$f_\sigma^{-1} = f_{\sigma'}, \text{ где } \sigma' = \sigma^{-1}.$$

Осталось установить коммутативность диаграммы из определения 3. Сделаем это, например, для σ_1:

$$[\mathrm{P}(\mathbf{A}, \varphi)\circ\sigma_{1B}](\xi) = (f_\sigma\xi)|\varphi| = f_\sigma[\xi|\varphi|] = [\sigma_{1C}\circ\mathrm{P}(\sigma\mathbf{A}, \varphi)](\xi).$$

Этим завершено доказательство ii), ввиду того что коммутативность диаграммы из ii) сразу следует из построения σ_1 и σ_2.

iii) Рассмотрим цепочку отображений:

$$\prod_{i\in I}|A_i| \xrightarrow{f_\pi} \prod_{j\in J}[\prod_{i\in I_j}|A_i|] \xrightarrow{\prod_{j\in J}\iota_{\mathbf{B}_j}} \prod_{j\in J}|\otimes\mathbf{B}_j| \xrightarrow{\iota_{\mathbf{B}}} |\bigotimes_{j\in J}(\otimes\mathbf{B}_j)|$$

где f_π – биекция ассоциативности декартова произведения и $\mathbf{B} = (\otimes_j \mathbf{B}_j)_{j\in J}$. Утверждается, что:

$$f_\pi(\prod_{j\in J}\iota_{\mathbf{B}_j})\iota_{\mathbf{B}} = \xi \text{ – полиморфизм.}$$

Действительно, фиксируем i' и пусть:

$$j' = \pi(i'),\ \mathbf{s} = (s_i)_{i\neq i'} \in \prod\nolimits_{i\neq i'}|A_i|,$$

$$\mathbf{s}_j = (s_i)_{\pi(i)=j, i\neq i'} \in \prod_{\substack{i\in I_j\\ i\neq i'}}|A_i|,$$

$$\mathbf{s}' = (\mathbf{s}_j)_{j\neq j'};$$

$$\mathbf{s}'' = [\eta_{\mathbf{B}_j}(\mathbf{s}_j)]_{j\neq j'} \in \prod_{j\neq j'}|\otimes\mathbf{B}_j|.$$

Тогда представляющий морфизм для среза $(\iota_{\mathbf{B}_{j'}})_{s_{j'}}$ существует по определению. Обозначим его:

$$\eta_{s_{j'}}: A_{i'} \to \otimes\mathbf{B}_{j'},$$

аналогично через:

$$\eta_{\mathbf{s}''}: \otimes\mathbf{B}_{j'} \to \otimes_j(\otimes\mathbf{B}_j)$$

обозначим представляющий морфизм для среза $(\iota_{\mathbf{B}})_{\mathbf{s}''}$. Теперь видно, что $\xi_{\mathbf{s}}$ – представим с представляющим морфизмом:

$$\eta_{\mathbf{s}_{j'}}\eta_{\mathbf{s}''}.$$

Таким образом, ξ – полиморфизм. Пропуская ξ через $\otimes\mathbf{A}$ получим $[\sigma_3]_{\mathbf{A}}$. Проверка свойства функториальности вполне формальна. ◆

3.4 Дальнейшие свойства тензорных произведений.

В этом параграфе мы продолжим изучение свойств тензорных произведений, налагая некоторые ограничения на структуру категории K. Оказывается, что если функтор |–| – представим, то представляющий объект при некоторых условиях, которые и сами по себе интересны, является единицей тензорного произведения. Кроме того, мы сравним конструкции тензорных и классических моноидальных категорий. Будет показано, что тензорные категории при некоторых естественных ограничениях моноидальны. Вводимое в данном параграфе понятие гомотетии заслуживает на наш взгляд отдельного исследования.

Рассмотрим тройку функторов:

$$K \underset{\Phi'}{\overset{\Phi}{\rightrightarrows}} K' \xrightarrow{\Psi} K''.$$

Если ξ: $\Phi \to \Phi'$ – естественное преобразование, то можно определить преобразование $\Psi\xi$: $\Phi\Psi \to \Phi'\Psi$ по формуле:

$$(\Psi\xi)_A = \Psi(\xi_A)\colon \Psi(\Phi(A)) \to \Psi(\Phi'(A)).$$

Аналогично для тройки:

$$K \xrightarrow{\Phi} K' \underset{\Psi'}{\overset{\Psi}{\rightrightarrows}} K''$$

и естественного преобразования η: $\Psi \to \Psi'$ определяется преобразование η_Φ по формуле:

$$(\eta_\Phi)_A = \eta_{\Phi(A)}\colon \Psi(\Phi(A)) \to \Psi'(\Phi(A)).$$

Легко видеть, что определенные так объекты в действительности являются естественными преобразованиями.

Определим пару отображений:

$$\varepsilon_\Psi\colon \mathrm{Nat}(\Phi, \Phi) \to \mathrm{Nat}(\Phi\Psi, \Phi\Psi),\ \varepsilon_\Psi\colon \xi \mapsto \Psi\xi$$

$$\varepsilon^\Phi\colon \mathrm{Nat}(\Psi, \Psi) \to \mathrm{Nat}(\Phi\Psi, \Phi\Psi),\ \varepsilon^\Phi\colon \eta \mapsto \eta_\Phi,$$

где $\mathrm{Nat}(\Phi, \Psi)$ – совокупность естественных преобразований из Φ в Ψ. Эти отображения суть гомоморфизмы моноидов.

<u>Определение 14.</u> i) (Φ, Ψ)-гомотетией называется гомоморфизм:

$$\varepsilon\colon \mathrm{Nat}(\Phi, \Phi) \to \mathrm{Nat}(\Psi, \Psi),$$

такой что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\Phi, \Phi) \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon_\Psi"'] & & \mathrm{Nat}(\Psi, \Psi) \arrow[dl, "\varepsilon^\Phi"] \\
& \mathrm{Nat}(\Phi\Psi, \Phi\Psi) &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

ii) Пусть $K = K' = K''$, $\Phi = \Theta(A)$ – постоянный функтор, $\Psi = 1_K$ – тождественный функтор. Тогда (Φ, Ψ)-гомотетию назовем гомотетией категории K относительно объекта A.

Мы скажем, что K допускает гомотетии относительно объекта A, если по крайней мере одна такая гомотетия существует.

<u>Определение 15.</u> Объект E категории K называется образующим, если для любой пары параллельных морфизмов $\alpha, \beta\colon A \to B$ из $\alpha \neq \beta$ следует, что существует $\gamma\colon E \to A$ такой, что $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$.

Заметим, что представляющий объект унивалентного функтора является образующим. Очевидно, верно и обратное: основной функтор отвечающий образующему объекту унивалентен.

<u>**Лемма 5.**</u> i) Категория K допускает гомотетии относительно образующего объекта E тогда и только тогда, когда для любого объекта A найдется отображение:

$$h_A\colon \mathrm{H}(E, E) \to \mathrm{H}(A, A)$$

такое что $h_E = 1_{\mathrm{H}(E,E)}$, и для любого морфизма $p\colon E \to A$ и любого $a \in \mathrm{H}(E, E)$ коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "a"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "h_A(a)"] & A \end{tikzcd} \qquad (3)$$

ii) Если категория K допускает гомотетии относительно образующего объекта, то эта гомотетия единственна.

Доказательство. i) Действительно, заметим во-первых что множество $\mathrm{Nat}(\Theta(E), \Theta(E))$ естественных преобразований постоянного функтора находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathrm{H}(E, E)$. Покажем что соответствие $A \mapsto h_A(a)$ является естественным преобразованием тождественного функтора. Необходимо установить коммутативность диаграммы:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h_A(a)"] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "h_B(a)"] & B \end{tikzcd}$$

где $\alpha\colon A \to B$ – произвольный морфизм. Учитывая (3) можно написать:

$$p((h_A(a))\alpha) = (p(h_A(a)))\alpha = ap\alpha = p\alpha h_B(a)$$

Откуда $(h_A(a))\alpha = \alpha(h_B(a))$, так как E – образующий. Итак, ξ – естественное преобразование. Положим $\varepsilon(a) = h_A(a)$. Далее, условие, выражаемое диаграммой (2) может быть записано в виде равенства $\Psi(\xi_A) = (\varepsilon(\xi))_{\Phi(A)}$, где $\xi\colon \Phi \to \Phi$ – произвольное естественное преобразование, что в нашем случае эквивалентно равенству $a = h_E(a)$, т.е. равенству $h_E = 1_{\mathrm{H}(E,E)}$. Это доказывает достаточность условий леммы, необходимость которых очевидна.

ii) Для двух гомотетий h и h', согласно (3), для любого морфизма $p\colon E \to A$ имеет место равенство $ph_A(a) = ph'_A(a) = ap$, что в силу определения образующего объекта эквивалентно равенству $h_A(a) = h'_A(a)$. ◆

Заметим, что из леммы, в частности, следует, что существование гомотетий относительно объекта E влечет коммутативность моноида $\mathrm{H}(E, E)$.

Пусть K – категория с конечными тензорными произведениями, причем представляющий объект E стирающего функтора |–| является образующим и K допускает гомотетии относительно объекта E. Тогда назовем K тензорной категорией с единицей E. Это название оправдывает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть K – тензорная категория с единицей E. Тогда функторы $-\otimes E$ и 1_K – естественно изоморфны.

Доказательство. Поскольку функтор |–| представлен объектом E мы в процессе доказательства отождествляем $|A|$ и $\mathrm{H}^E(A)$. Положим:

$$\xi_A\colon \mathrm{H}^E(A)\times\mathrm{H}^E(E) \to \mathrm{H}^E(A)$$

$$\xi_A\colon (p, a) \mapsto ap.$$

ξ_A – полиморфизм. Действительно:

$$(\xi_A)_p = \mathrm{H}^E(p) \text{ и } (\xi_A)_a = \mathrm{H}^E(h_A(a)).$$

Пропуская ξ_A через канонический полиморфизм

$$\iota\colon \mathrm{H}^E(A)\times\mathrm{H}^E(E) \to \mathrm{H}^E(A\otimes E),$$

получаем морфизм:

$$\varepsilon_A\colon A\otimes E \to A.$$

Проверим функториальность соответствия $\varepsilon\colon A \to \varepsilon_A$, т.е. установим коммутативность диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes E \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1_E"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
B\otimes E \arrow[r, "\varepsilon_B"] & B
\end{tikzcd}$$

для произвольного морфизма $\alpha\colon A \to B$.

Во-первых,

$$\zeta\colon \mathrm{H}^E(A)\times\mathrm{H}^E(E) \to \mathrm{H}^E(B),\ \zeta\colon (p, a) \mapsto ap\alpha$$

– полиморфизм, а, значит, существует единственный морфизм:

$$\tau\colon A\otimes E \to B,$$

удовлетворяющий условию:

$$[\mathrm{H}^E(\tau)](\iota(p, a)) = ap\alpha.$$

Во-вторых:

$$[\mathrm{H}^E(\varepsilon_A\alpha)](\iota(p, a)) = [\mathrm{H}^E(\alpha)](ap) = ap\alpha \text{ и}$$

$$[\mathrm{H}^E(\varepsilon_B\circ(\alpha\otimes 1_E))](\iota(p, a)) = [\mathrm{H}^E(\varepsilon_B)](\iota(p\alpha, a)) = ap\alpha.$$

Таким образом, $\varepsilon_A\,\alpha = \tau = (\alpha\otimes 1_E)\varepsilon_B$. Далее, так как ι – полиморфизм, то срез ι_1, где $1=1_E$ – представим. Пусть

$$\eta_A: A \to A\otimes E$$

представляющий морфизм. Осталось проверить, что

$$\eta_A\varepsilon_A = 1_A \text{ и } \varepsilon_A\eta_A = 1_{A\otimes E}.$$

Имеем:

$$[\mathrm{H}^E(\eta_A\varepsilon_A)](p) = [\mathrm{H}^E(\varepsilon_A)]([\mathrm{H}^E(\eta_A)](p)) = [\mathrm{H}^E(\varepsilon_A)](\iota(p, 1_E)) = p.$$

Значит, $\eta_A\varepsilon_A = 1_A$, так как E – образующий.

Для любого полиморфизма ξ: $\mathrm{H}^E(A)\times\mathrm{H}^E(A') \to \mathrm{H}^E(B)$ можно написать:

$$\xi(ap, q) = \xi_q(ap) = (ap)x_q = a(px_q) = a\xi(p, q),$$

где x_q: $A \to B$ – морфизм, представляющий срез ξ_q. Таким образом:

$$\xi(ap, q) = a\xi(p, q) = \xi(p, aq).$$

Заметим, что этот результат обобщается на любое число аргументов. Теперь можно написать:

$$[\mathrm{H}^E(\varepsilon_A\,\eta_A)](\iota(p, a)) = \iota(ap, 1_E) = \iota(p, a)$$

а, значит, $\varepsilon_A\eta_A = 1_{A\otimes E}$ по свойству универсальности тензорного произведения. ◆

В заключение докажем одну теорему устанавливающую связь между тензорными категориями с единицей и симметрическими моноидальными категориями.

<u>Определение 16.</u> Под моноидальной категорией понимается шестерка:

$$(K, \otimes, E, \alpha, \lambda, \rho),$$

состоящая из категории K, объекта E, двуместного функтора:

$$-\otimes-: K\times K \to K,$$

естественного изоморфизма ассоциативности:

$$\alpha: -\otimes(-\otimes-) \to (-\otimes-)\otimes-,$$

естественного изоморфизма левой тензорной единицы:

$$\lambda: E\otimes- \to 1_K,$$

и естественного изоморфизма правой тензорной единицы:

$$\rho: -\otimes E \to 1_K,$$

удовлетворяющих условиям когерентности:

i)

$$\begin{tikzcd}
A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_A\otimes\alpha"] & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[d, "\alpha^{-1}\otimes 1_D"] \\
A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[rr, "\alpha"] & & (A\otimes(B\otimes C))\otimes D
\end{tikzcd}$$

ii)

$$\begin{tikzcd} A\otimes(E\otimes B) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "1_A\otimes\lambda"'] & & (A\otimes E)\otimes B \arrow[dl, "\rho\otimes 1_B"] \\ & A\otimes B & \end{tikzcd}$$

Определение 17. Моноидальная категория называется симметрической, если определен еще и изоморфизм

$$\gamma_{AB}: A\otimes B \to B\otimes A,$$

удовлетворяющий дополнительным условиям когерентности:

i) $\gamma^{-1}_{AB} = \gamma_{BA}$

ii)

$$\begin{tikzcd} E\otimes A \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & A\otimes E \arrow[dl, "\rho"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

iii)

$$\begin{tikzcd} A\otimes(B\otimes C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_A\otimes\gamma"] & (A\otimes B)\otimes C \arrow[r, "\gamma"] & C\otimes(A\otimes B) \arrow[d, "\alpha"] \\ A\otimes(C\otimes B) \arrow[r, "\alpha"] & (A\otimes C)\otimes B \arrow[r, "\gamma\otimes 1_B"] & (C\otimes A)\otimes B \end{tikzcd}$$

Определение 18. Тензорное произведение в категории K с тензорными произведениями называется ассоциативным, если морфизм σ_3 из пункта iii) теоремы 2 является изоморфизмом.

Теорема 4. Пусть K – тензорная категория с единицей и тензорное произведение ассоциативно. Тогда:

i) Шестерка

$$(K, \otimes, E, \alpha, \varepsilon, \sigma_2\varepsilon),$$

где ε – изоморфизм теоремы 3, σ_2 – изоморфизм пункта ii) теоремы 2, $\alpha = \sigma_3^{-1}\sigma_3'$,

$$\sigma_3^{-1}: A\otimes(B\otimes \mathrm{C}) \mapsto A\otimes B\otimes \mathrm{C},$$

$$\sigma_3': A\otimes B\otimes \mathrm{C} \mapsto (A\otimes B)\otimes \mathrm{C} ;$$

является моноидальной категорией ;

ii) Добавляя изоморфизм σ_2, получим симметрическую моноидальную категорию.

Доказательство. Проверки требуют лишь условия когерентности, причем условия i), ii) из определения 17, очевидно, выполнены. Пусть

$$p \in \mathrm{H}^E(A) \text{ и } q \in \mathrm{H}^E(B)$$

тогда $p\otimes q$: $E\otimes E \to A\otimes B$. Простое сравнение определений приводит к равенству:

$$\eta_E p\otimes q = \iota(p, q),$$

где η_E – изоморфизм из теоремы 3. Мы обозначаем $\eta_E p\otimes q$ снова через $p\otimes q$. Докажем, например, коммутативность диаграммы i) из определения 16. Так как существует единственный изоморфизм:

$$A\otimes B\otimes C\otimes D \to A\otimes(B\otimes(C\otimes D)),$$

переводящий $p\otimes q\otimes s\otimes t$ в $p\otimes(q\otimes(s\otimes t))$ (существование и единственность морфизма устанавливаются теоремой 2; изоморфность видна из ассоциативности тензорного произведения); и единственный изоморфизм:

$$A\otimes B\otimes C\otimes D \to (A\otimes(B\otimes C))\otimes D,$$

переводящий $p\otimes q\otimes s\otimes t$ в $(p\otimes(q\otimes s))\otimes t$, то существует единственный изоморфизм, переводящий $p\otimes(q\otimes(s\otimes t))$ в $(p\otimes(q\otimes s))\otimes t$, но этому условию удовлетворяют оба пути, ведущие из левого верхнего в правый нижний угол диаграммы i) определения 16. Коммутативность остальных диаграмм разбирается аналогично. ◆

3.5 Дифференциальное исчисление в категориях с единицей и дальнейшие обобщения.

В этом параграфе вкратце показано как можно определить дифференциальное исчисление на функторе из одной аддитивной категории с единицей в другую. Также рассмотрена возможность обобщения конструкции тензорного произведения. Обсуждаемые вопросы находятся в стадии исследования.

Пусть Φ: $K_A \to K$, функтор категории с единицей A в аддитивную категорию (категория называется аддитивной, если на множествах $\mathrm{H}_A(P, Q)$ определена структура абелевой группы сохраняемая композицией). На множестве $\mathrm{H}_K(\Phi(P), \Phi(Q))$ определим скобку соотношением:

$$[\Delta, f] = \Delta\Phi(h_P(f)) - \Phi(h_Q(f))\Delta,$$

где $f \in \mathrm{H}_A(A, A)$ и h – гомотетия в A. Определим подгруппы д.о. по индукции, положив:

i) $D_{-1}(\Phi(P), \Phi(Q)) = 0$;

ii) $D_i(\Phi(P), \Phi(Q)) = \{\Delta\in\mathrm{H}_K(\Phi(P), \Phi(Q)) \mid [\Delta, f]\in D_{i-1}(\Phi(P), \Phi(Q))\}$.

Легко видеть, что $\Phi(\mathrm{H}_A(P, Q))\subset D_0(\Phi(P), \Phi(Q))$ и $D_i(\Phi(P), \Phi(Q))\subset D_j(\Phi(P), \Phi(Q))$ при $i \le j$. Таким образом, вводимые подгруппы являются обобщением подмодулей д.о. введенных в главе 2.

Заметим, что существенную роль в определении играет понятие гомотетии. На наш взгляд для построения содержательной теории необходимо наличие тензорных произведений, по крайней мере, в категории K.

Относительной категорией K назовем структуру состоящую из класса объектов $\mathrm{Ob}(K)$, соответствия $(A, B) \mapsto \mathrm{H}_K(A, B) \in \mathrm{Ob}(M)$, где M – некоторая категория с ассоциативными тензорными произведениями и семейства M-морфизмов:

$$\circ_{ABC} : \mathrm{H}_K(A, B) \otimes \mathrm{H}_K(B, C) \to \mathrm{H}_K(A, C),$$

удовлетворяющих условиям:

i) $(\circ_{ABC} \otimes 1_{\mathrm{H}(C,\, D)}) \circ_{ACD} = \sigma(1_{\mathrm{H}(A,\, B)} \otimes \circ_{BCD}) \circ_{ABD}$,

где σ – изоморфизм ассоциативности.

ii) полиморфизмы соответствующие морфизмам $\circ_{ABC}$ как теретико-множественные отображения удовлетворяют условиям из определения категории (см. § 3.2), т.е. наделяют K структурой обычной категории.

Формальная проверка показывает, что данное определение является обобщением определения категории на случай, когда Hom-ы являются не множествами, а объектами некоторой категории, а также совпадает с классическим определением относительной категории (см. [39], стр. 447). в случае тензорных категорий с единицей. Здесь следует отметить, что в теории категорий, как претендующей на полное вытеснение теоретико-множественного языка, всегда существовала тенденция, если возможно, освобождаться от использования круга понятий теории множеств. Но кроме всего прочего, на практике довольно часто (почти всегда) приходится рассматривать категории Hom-множества которых обладают дополнительной структурой, и в свете этого конструкция относительных категорий выглядит вполне естественно. На относительные категории легко переносятся все упоминавшиеся в работе конструкции теории категорий. Мы, не вдаваясь в подробности, лишь укажем как можно ввести тензорное произведение в относительных категориях.

Итак, пусть стирающий функтор $|{-}|$ действует теперь из K в M и $\mathbf{A}=\{A_i\}_{i\in I}$ – семейство объектов M (I – произвольное семейство индексов). Полиморфизмом из $\mathbf{A}$ в B назовем произвольный морфизм $\otimes|\mathbf{A}| \to |B|$. Теперь определение тензорного произведения воспроизводится дословно.

Конечно же, перенесение результатов настоящей главы на случай относительных категорий не так очевидно, но, думается, неоткуда ожидать непредвиденных трудностей.

В качестве справочной литературы по данной главе можно использовать, например, [38, 39].

4. Символы дифференциальных операторов и связности.

4.1. Введение к главе 4.

Как известно, символ классического линейного д.о. в частных производных порядка $\leq n$ вида:

$$D = \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}, \tag{1}$$

где α – мультииндекс:

$$\alpha = (i_1, \ldots, i_m),\ |\alpha| = i_1 + \ldots + i_m,\ i_m \geq 0,$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m;\ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha} = \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}},$$

определяется как (неоднородный) полином n-ого порядка от m переменных вида:

$$\sigma_D(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha(\mathbf{x})\, \mathbf{t}^\alpha. \tag{2}$$

где $\mathbf{t}^\alpha = t_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot t_m^{i_m}$. Значение понятия символа трудно переоценить. Достаточно вспомнить, что преобразование Фурье оператора с постоянными коэффициентами есть оператор умножения на символ, другими словами:

$$F \circ D = T_D \circ F, \tag{3}$$

где оператор T_D определяется соотношением $T_D(f(\mathbf{t})) = \sigma_D(i\mathbf{t}) \cdot f(\mathbf{t})$, а F – оператор преобразования Фурье. Для наглядности перепишем (3) в классических обозначениях:

$$\int_{R^m} e^{-i\langle \mathbf{x},\, \mathbf{t} \rangle} \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^\alpha} d\mathbf{x} = \sum_{|\alpha|=0}^{n} a_\alpha (i\mathbf{t})^\alpha \int_{R^m} e^{-i\langle \mathbf{x},\, \mathbf{t} \rangle} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где $\langle \mathbf{x}, \mathbf{t} \rangle$ – скалярное произведение. Но оператор написанный справа в (3) легко обратить: $(T_D \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ T_D^{-1}$, где $T_D^{-1} = f(\mathbf{t})/\sigma_D(i\mathbf{t})$; что дает возможность написать обращение для D: $D^{-1} = F^{-1} \circ T_D^{-1} \circ F$ (мы не выписываем соответствующий $2m$-кратный интеграл). Вышеописанный прием и его многочисленные вариации, конечно же, давно известны и с успехом применяются для интегрирования классических уравнений математической физики. Нам хотелось лишь подчеркнуть фундаментальность понятия символа д.о. и важность класса операторов с постоянными коэффициентами, т.е. операторов удовлетворяющих условию $a_\alpha(\mathbf{x}) = const$, которое может быть переписано в виде:

$$\left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \right) \equiv \mathbf{0}, \text{ или в виде } da_\alpha = 0, \tag{4}$$

где da_α – дифференциал функции a_α (мы избегаем устаревшего термина "градиент", вызывающего нежелательную ассоциацию с нормалью к поверхности и тем самым подразумевающего наличие евклидовой структуры, совершенно не имеющей отношения к рассматриваемой ситуации). Мы вернемся к простому наблюдению выраженному в (4) при обсуждении д.о. с постоянными коэффициентами относительно связности.

Итак, если операторы с постоянными коэффициентами легко интегрировать, возникает естественный вопрос: можно ли по данному оператору (1) найти систему координат, в которой он имеет постоянные коэффициенты (эта естественная постановка задачи, как уже отмечалось в §1.1, неприемлема если формально следовать какому-либо из классических определений д.о.). Прежде чем приступить к непосредственному рассмотрению поставленной задачи с использованием круга понятий и методов ГТДУ, опишем возникающую абстрактную ситуацию.

Как уже отмечалось выше (см. §1.3) определение символа типа (2) (мы называем его полным символом) для д.о. в категории модулей не представляется возможным без наличия дополнительной структуры, которая в общем случае описывается парой связностей. Возможно лишь определение так называемого главного символа, являющегося в классическом случае однородным полиномом вида:

$$\sigma_D(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha(\mathbf{x})\, \mathbf{t}^\alpha\ . \tag{5}$$

Многие из результатов настоящей главы в частном случае векторных расслоений класса C^∞, можно найти в [32], гл. IV. Обратим внимание на то, что в указанной статье Р. Пале существенно используются системы координат и тейлоровские разложения. С другой стороны, в монографии [20], при рассмотрении общей ситуации полный символ не определяется. Данная глава, в частности, заполняет пробел между работами [32] и [20]. Кроме того оказывается возможным доказать точность первой последовательности д.о. и двойственной последовательности джетов существенно ослабляя условия "гладкой ситуации" (см. [20] 1.5.1).

В заключение для удобства поместим определения основных используемых понятий из полилинейной и гомологической алгебры. Последовательность модулей и гомоморфизмов:

$$\ldots \to P_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n+1} \to \ldots$$

называется точной в члене P_n, если имеет место равенство $\ker\varphi_n = \mathrm{im}\varphi_{n-1}$, т.е. образ предшествующего отображения равен ядру последующего. Точная во все членах последовательность называется просто точной. В частности, точность последовательности $0 \to P \to Q$ (соответственно

$P \to \mathrm{Q} \to 0$) означает инъективность (соответственно сюръективность) соответствующего гомоморфизма. Точная последовательность вида:

$$0 \to P \xrightarrow{\iota} Q \xrightarrow{\pi} R \to 0 \qquad (6)$$

называется короткой точной последовательностью. Последовательность (6) называется расщепимой, если найдется разложение $Q = Q_1 \oplus Q_2$ такое, что $\iota(P) = Q_1$ и $\pi(Q_2) = R$. Эквивалентные определения расщепления:
1) расщепление это гомоморфизм τ: $R \to Q$ такой, что $\tau\pi = 1_R$;
2) расщепление это гомоморфизм θ: $Q \to P$ такой, что $\iota\theta = 1_P$.

Пусть $P^{\otimes n}$ – n-ая тензорная степень модуля P. Для любой перестановки σ на множестве из n элементов определим автоморфизм $P^{\otimes n}$ действием на разложимых тензорах следующим образом:

$$S_\sigma\colon P^{\otimes n} \to P^{\otimes n},\ S_\sigma(\, p_1 \otimes \ldots \otimes p_n\,) = p_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes p_{\sigma(n)}.$$

Далее, определим n-ую симметрическую степень S^nP модуля P как подмодуль в $P^{\otimes n}$ определяемый соотношением:

$$S^nP = \{t \in P^{\otimes n} \mid S_\sigma(t) = t, \text{ для любого } \sigma\}.$$

Элементы S^nP называются (однородными) симметрическими тензорами степени n. Введем обозначение:

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n = \textstyle\sum_\sigma p_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes p_{\sigma(n)}.$$

Модуль S^nP порождается элементами вида $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ и соответствие:

$$\lambda\colon p_1 \otimes \ldots \otimes p_n \mapsto p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$$

продолжается до эпиморфизмом модулей.

На любой абелевой группе A определена структура $\mathbf{Z}$-модуля:

$$n \cdot a = a + \ldots + a$$

где сумма содержит n слагаемых. Группа A наделяется структурой линейного пространства над полем $\mathbf{Q}$, согласованной со структурой $\mathbf{Z}$-модуля тогда и только тогда, когда все $\mathbf{Z}$-гомотетии обратимы. В случае, когда кольцо A является $\mathbf{Q}$-пространством, мы определим λ несколько иначе:

$$\lambda\colon p_1 \otimes \ldots \otimes p_n \mapsto (1/n!)\, p_1 \cdot \ldots \cdot p_n.$$

Это определение обладает тем преимуществом, что λ оказывается правым обратным к каноническому вложению $S^nP \to P^{\otimes n}$.

4.2. Полидифференциальные операторы и главный символ.

Введем в рассмотрение категорию Diff:

$$\mathrm{Ob(Diff)} = \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}_A),\ \mathrm{H}_{\mathrm{Diff}}(P, Q) = D(P, Q),$$

т.е. вместо A-линейных отображений в качестве морфизмов выбраны дифференциальные операторы. В качестве стирающего функтора выберем стандартный "забывающий" функтор на категории A-модулей, о котором мы далее не упоминаем, так как из контекста всегда ясно идет ли речь о модуле или о множестве его элементов.

Определение 1. Полиморфизмы категории Diff называются полидифференциальными операторами (п.о.). Порядком п.о. называется наибольший порядок д.о. представляющих срезы.

Обозначим через $\mathrm{P}(\mathbf{P}, Q)$ множество п.о. из семейства $\mathbf{P} = (P_i)_{i\in I}$, где I – (конечное) индексное множество. Заметим, что функтор $\mathrm{P}(\mathbf{P}, –)$, вообще говоря, не представим, как не представим и функтор $D(P, –)$. Но он является в некотором смысле "индуктивным пределом" представимых функторов. Введем в рассмотрение функторы $\mathrm{P}_n(\mathbf{P}, –)$, где $\mathrm{P}_n(\mathbf{P}, Q)$ – множества п.о. порядка $\le n$. Заметим, что $\mathrm{P}_n(\mathbf{P}, –)$ являются функторами из категории Mod_A, а не из категории Diff.

Теорема 1. Функтор $\mathrm{P}_n(\mathbf{P}, –)$ представим с представляющей парой $(\mathbf{J}^n(\mathbf{P}), \mathbf{j}_n)$, где $\mathbf{J}^n(\mathbf{P}) = J^n(P_1)\otimes\ldots\otimes J^n(P_m)$ и $\mathbf{j}_n(p_1, \ldots, p_m) = j_n(p_1)\otimes\ldots\otimes j_n(p_m)$.

Доказательство. Пусть $\Delta \in \mathrm{P}_n(\mathbf{P}, Q)$. Тогда, согласно определению, для любого $\mathbf{p}\in\mathbf{P}' = \prod_{i\neq i'} P_i$ срез $\Delta_{\mathbf{p}}\colon P_{i'} \to Q$ – есть д.о. порядка $\le n$. Таким образом определено отображение: $\Delta_{i'}\colon \mathbf{P}' \to \mathrm{Hom}_A(J^n(P_{i'}), Q)$, являющееся как легко видеть п.о. Соответствие $\Delta \mapsto \Delta_{i'}$, очевидно, биективно. Повторяя указанную процедуру, получим биекцию:

$$\mathrm{P}_n(\mathbf{P}, Q) \to (\mathrm{Hom}_A(J^n(P_1), (\mathrm{Hom}_A(J^n(P_2), \ldots, (\mathrm{Hom}_A(J^n(P_m), Q)\ldots).$$

Далее, многократно применяя канонический изоморфизм:

$$\mathrm{Hom}_A(R, \mathrm{Hom}_A(P, Q)) \cong \mathrm{Hom}_A(R\otimes P, Q), \tag{7}$$

получаем биекцию:

$$\mathrm{P}_n(\mathbf{P}, Q) \to \mathrm{Hom}_A(J^n(P_1)\otimes\ldots\otimes J^n(P_m), Q).$$

Мы опускаем автоматическую проверку функториальности. ◆

Дальнейшее изложение часто носит информативный характер и потому несколько сжато в связи с тем, что большинство из приводимых результатов (возможно в иной окраске) можно найти в [20], гл. I.

Введем в рассмотрение модули дифференцирований:

$$D(P) = \{\partial\in \mathrm{Hom}_k(A, P) \mid \partial(fg) = f\partial(g) + g\partial(f)\} \tag{8}$$

Очевидно, что $D(P) \subset D_1(A, P)$. Более того, имеется короткая точная последовательность (так называемая последовательность Спенсера первого порядка модуля P, см. [20] 1.1.6)):

$$0 \to D(P) \to D_1(A, P) \to P \to 0 \tag{9}$$

где стрелка $D_1(A, P) \to P$ определяется соотношением $\Delta \mapsto \Delta(1)$. Эта последовательность расщепляется вложением:

$$P \cong \mathrm{Hom}_A(A, P) \subset D_1(A, P).$$

Таким образом, имеем:

$$D_1(A, P) \cong D(P) \oplus P. \tag{10}$$

Пусть $\iota_n : A \to J^n(A)$ – гомоморфизм задаваемый соотношением $a \mapsto aj_n(1)$. Положим $T^*A = J^1(A)/\iota_1(A)$ и назовем T^*A кокасательным модулем (или модулем дифференциалов) алгебры A. По определению имеется короткая точная последовательность A-гомоморфизмов:

$$0 \to A \to J^1(A) \to T^*A \to 0 \tag{11}$$

Легко видеть, что:

$$\mathrm{Hom}_A(T^*A, P) \cong D(P) \tag{12}$$

(см. [20], 1.2.5) и (9) получается применением к (11) функтора $\mathrm{Hom}_A(–, P)$. Определим d: $A \to T^*A$ как композицию стрелок j_1 и естественной проекции:

$$A \to J^1(A) \to J^1(A)/\iota_1(A)$$

Модуль T^*A порождается элементами вида df, где $f \in A$ и точная последовательность (11) расщепляется вложением τ: $T^*A \to J^1(A)$ определяемым соотношением $\tau(df) = j_1(f) - \iota_1(f)$. Подытожим сказанное теоремой.

<u>Теорема 2.</u> i) Модуль $D(P)$ состоит в точности из д.о. Δ первого порядка удовлетворяющих условию $\Delta(1) = 0$ и имеет место разложение (10).

ii) Модуль T^*A порождается элементами вида df и имеет место разложение:

$$J^1(A) \cong T^*A \oplus A.$$

iii) Для любого оператора $\Delta \in D(P)$, существует единственный A-гомоморфизм τ_Δ, такой что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ T^*A \arrow[rr, "\tau_\Delta"] & & P \end{tikzcd}$$

iv) Для полидифференциального оператора первого порядка:

$$\Delta : \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n} \to P$$

такого что любой срез представлен дифференцированием (назовем такие операторы полидифференцированиями, кратко – п.д.), существует единственный A-гомоморфизм:

$$\sigma\colon (T^*A)^{\otimes n} \to P,$$

такой что $\sigma \circ d^{\otimes n} = \Delta$, где $d^{\otimes n}$ – п.д. определяемое соотношением:

$$d^{\otimes n}\colon (f_1, \ldots, f_n) \mapsto d(f_1) \otimes \ldots \otimes d(f_n).$$

Если же Δ симметричен относительно перестановок аргументов, то σ может интерпритироваться как гомоморфизм из n-ой симметрической степени модуля T^*A, которую далее обозначаем через $S^m A$.

Доказательство. Пункты i), ii), iii) были доказаны выше (пункт iii) является пояснением действия изоморфизма (12)). Для доказательства пункта iv) достаточно повторить рассуждения приводимые в доказательстве теоремы 1 с заменой j_n на d и $J^n(A)$ на T^*A. Если же Δ симметричен, то симметричным будет и соответствующее полилинейное отображение, а, значит, оно может быть пропущено через соответствующую симметрическую степень модуля T^*A. ◆

Приведем важнейший пример п.д. Пусть $\Delta\in D_n(P, Q)$. Определим отображение σ_Δ n-ой декартовой степени алгебры A:

$$\sigma_\Delta\colon A^{\times n} \to \mathrm{Hom}_A(P, Q)$$

$$\sigma_\Delta(f_1, \ldots, f_n) = [\ldots[\Delta, f_1] \ldots, f_n]. \tag{13}$$

Легко видеть, что σ_Δ – симметрическое n-п.д. Согласно теореме 2 iv) σ_Δ пропускается через S^mA. Соответствующее отображение обозначим снова σ_Δ. Заметим, что в силу уже упоминавшегося отождествления (7), можно рассматривать σ_Δ как гомоморфизм из $S^mA\otimes P$ в Q.

Определение 2. Гомоморфизм $\sigma_\Delta\colon S^mA\otimes P \to Q$ называется главным символом д.о. Δ.

В классическом случае операторов в кольце дифференцируемых функций $\sigma_\Delta\in (S^mA)^*$, а модуль $(S^mA)^*$ как известно изоморфен модулю однородных полиномов степени m. Таким образом, мы действительно определили объекты обобщающие (5).

Назовем $\mathrm{Hom}_A(S^mA\otimes P, Q)$ модулем символов для д.о. из P в Q, а $S^mA\otimes P$ модулем косимволов модуля P.

Пусть теперь Δ и Δ' последовательные д.о. порядков n и m соответсвенно ($\Delta\in D_n(P, Q)$ и $\Delta'\in D_m(Q, Q')$). Тогда определен гомоморфизм:

$$\sigma_\Delta\otimes\sigma_{\Delta'}: S^nA\otimes S^mA \to \mathrm{Hom}_A(P, Q)\otimes\mathrm{Hom}_A(Q, Q'),$$

Пусть далее $\iota\colon S^{n+m}A \to S^nA\otimes S^mA$ – каноническое вложение, обозначим также $\tau\colon \mathrm{Hom}_A(P, Q)\otimes\mathrm{Hom}_A(Q, Q') \to \mathrm{Hom}_A(P, Q')$ – канонический гомоморфизм, определяемый обычной композицией. Введем в рассмотрение сквозной гомоморфизм $\sigma_{\Delta'}\circ\sigma_\Delta$, который назовем композицией символов:

$$S^{n+m}A \to S^nA\otimes S^mA \to \mathrm{Hom}_A(P, Q)\otimes\mathrm{Hom}_A(Q, Q') \to \mathrm{Hom}_A(P, Q')$$

$$\sigma_{\Delta'}\circ\sigma_\Delta = \iota(\sigma_\Delta\otimes\sigma_{\Delta'})\tau$$

Следующий простой результат не обнаружен нами ни в [20] ни в [32].

Теорема 3. Для символа композиции пары последовательных дифференциальных операторов Δ и Δ' имеет место соотношение:

$$\sigma_{\Delta'\circ\Delta} = \sigma_{\Delta'}\circ\sigma_\Delta\,.$$

Другими словами, символ композиции есть композиция символов.

Доказательство. Достаточно заметить, что утверждение теоремы есть просто переформулировка леммы 1 из § 2.2. ◆

4.3 Точные последовательности джетов и дифференциальных операторов.

Определим оператор $\Delta' \in D_{n\text{-}1}(P, D_1(A, Q))$ следующим образом:

$$\Delta'(p): f \mapsto [\Delta, f](p).$$

Легко видеть, что на самом деле $\Delta' \in D_{n\text{-}1}(P, D(Q))$. Итерируя эту процедуру на втором шаге получим оператор:

$$\Delta'' \in D_{n\text{-}2}(P, D(D(Q))).$$

Обозначим $D(D(Q))$ через $D^2(Q)$. Продолжая итерационный процесс получим последовательность A-гомоморфизмов:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, Q) \to D_n(P, Q) \to D_{n\text{-}1}(P, D(Q)) \to \ldots \to D_{n\text{-}i}(P, D^i(Q)) \to$$
$$\ldots \to \mathrm{Hom}_A(P, D^n(Q)) \to 0,$$

точную во втором члене. Легко видеть, что ядро i-ого сквозного отображения $D_n(P, Q) \to D_{n\text{-}i}(P, D^i(Q))$ есть $D_{i\text{-}1}(P, Q)$. Другими словами, для всех i точны следующие последовательности:

$$0 \to D_{i\text{-}1}(P, Q) \to D_n(P, Q) \to D_{n\text{-}i}(P, D^i(Q))$$

В частности точна последовательность:

$$0 \to D_{n\text{-}1}(P, Q) \to D_n(P, Q) \to \mathrm{Hom}_A(P, D^n(Q)).$$

Обозначим через $\mathbb{P}_n(Q)$ модуль n-полидифференцирований из A в Q. Простое сравнение определений показывает, что модули $\mathbb{P}_n(Q)$ и $D^n(Q)$ изоморфны. С другой стороны, согласно теореме 2 iv) имеем изоморфизм $\mathbb{P}_n(Q) \cong \mathrm{Hom}_A((T^*A)^{\otimes n}, Q)$. Таким образом мы приходим к точной последовательности:

$$0 \to D_{n\text{-}1}(P, Q) \to D_n(P, Q) \to \mathrm{Hom}_A(P\otimes(T^*A)^{\otimes n}, Q).$$

Заметим, что произведенная нами n-кратная итерация в точности совпадает с отображением σ_Δ определенным в (13), а, значит, образ последней стрелки лежит в подмодуле симметрических тензоров. Окончательно получаем теорему:

Лемма 1. Следующая последовательность точна:

$$0 \to D_{n\text{-}1}(P, Q) \to D_n(P, Q) \to \mathrm{Hom}_A(S^nA\otimes P, Q), \tag{14}$$

где последняя стрелка (обозначим ее σ_n) переводитΔ в σ_Δ. ◆

Пусть теперь σ^n – символ канонического оператора j_n: $P \to J^n(P)$. Таким образом, σ^n – гомоморфизм из $S^nA\otimes P$ в $J^n(P)$. Согласно определениям гомоморфизм σ^n переводит элемент $df_1\cdot\ldots\cdot df_n\otimes p$ в смежный класс элемента $[\ldots[1\otimes p, f_1]\ldots f_n]$ и, следовательно, верна теорема.

Лемма 2. Следующая последовательность точна:

$$S^nA\otimes P \to J^n(P) \to J^{n\text{-}1}(P) \to 0, \tag{15}$$

где средняя стрелка суть каноническая проекция, определенная в §2.2. ◆

Под "гладкой ситуацией" мы, следуя [20], будем понимать следующую совокупность условий: модули P, Q, T^*A проективны и конечно порождены и char $k = 0$. Из результатов приведенных в [20], §5 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. В гладкой ситуации следующие короткие последовательности точны:

$$0 \to S^nA\otimes P \to J^n(P) \to J^{n-1}(P) \to 0, \qquad (16)$$

$$0 \to D_{n-1}(P, Q) \to D_n(P, Q) \to \mathrm{Hom}_A(S^nA\otimes P, Q) \to 0, \qquad (17)$$

Другими словами, первая стрелка в (15) – мономорфизм и последняя стрелка в (14) эпиморфизм.

Мы докажем точность последовательностей (16) и (17) при n=1, существенно ослабив требования предъявляемые гладкой ситуацией.

Теорема 5. Если P – проективный A-модуль, то следующие короткие последовательности точны:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P, Q) \to D_1(P, Q) \to \mathrm{Hom}_A(T^*A\otimes P, Q) \to 0, \qquad (18)$$

$$0 \to T^*A \otimes P \to J^1(P) \to P \to 0, \qquad (19)$$

Доказательство. Для доказательства (18) нам достаточно установить эпиморфность отображения $\sigma\colon D_1(P, Q) \to \mathrm{Hom}_A(T^*A\otimes P, Q)$. Воспользовавшись изоморфизмом $\mathrm{Hom}_A(T^*A\otimes P, Q) \cong \mathrm{Hom}_A(P, D(Q))$ сведем дело к следующему утверждению: Для любого гомоморфизма $\partial\colon P \to D(Q)$ существует д.о. первого порядка Δ, такой что:

$$[\Delta, f]\, p = \partial(p)(f). \qquad (20)$$

Пусть сперва P – свободный модуль и $\{p_\alpha\}$ – базис в P. Для любого элемента $p\in P$ с разложением $p = \sum_\alpha f_\alpha p_\alpha$, положим $\Delta(p) = \sum_\alpha \partial(p_\alpha)(f_\alpha)$. Так определенный Δ очевидно аддитивен и k-линеен. Для скобки $[\Delta, f]$ имеем:

$$[\Delta, f]\, p = \Delta(fp) - f\Delta(p) = \sum\nolimits_\alpha (\partial(p_\alpha)(ff_\alpha) - f\partial(p_\alpha)(f_\alpha)) =$$

$$= \sum\nolimits_\alpha f_\alpha \partial(p_\alpha)(f) = \partial(\sum\nolimits_\alpha f_\alpha p_\alpha)(f) = \partial(p)(f)$$

мы использовали тот факт, что $\partial(p)$ – дифференцирование и линейность соответствия $p \mapsto \partial(p)$. Таким образом, эпиморфность отображения σ, а с нею и точность короткой последовательности (18) в случае свободного модуля P установлены. Пусть теперь P – проективный модуль и F (всегда существующий) свободный модуль содержащий P как прямое слагаемое. Выберем произвольный элемент $\partial\in\mathrm{Hom}_A(P, D(Q))$ и продолжим его нулем на F, для продолжения найдем оператор Δ (существующий по доказанному) и возьмем его ограничение на P. Полученный оператор обеспечивает сюръективность σ. Это доказывает точность (18) для произвольного проективного модуля P.

Пусть теперь Q – произвольный инъективный модуль. Заметим, что согласно определениям, последовательность (14) получается из (15) применением функтора $\mathrm{Hom}_A(–, Q)$. Пусть теперь Q – произвольный модуль. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ T^*A\otimes P \arrow[ur, "\sigma_n(\Delta)=\mathrm{Hom}(\sigma^n{,}\, Q)(\Delta)"] \arrow[rr, "\sigma^n"] & & J^1(P) \arrow[ul, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad (21)$$

Только что доказанная сюръективность σ означает, что для любого гомоморфизма $\theta\in \mathrm{Hom}_A(T^*A\otimes P, Q)$ существует гомоморфизм $\Delta\in \mathrm{Hom}_A(J^1(P), Q)$ такой что $\sigma_n(\Delta) = \theta$, т.е. для θ коммутативна диаграмма (21). В частности, для случая $Q = T^*A\otimes P$, $\theta = 1_{T^*A\otimes P}$ найдется Δ такой что $\sigma^n\Delta = 1_{T^*A\otimes P}$, а это означает мономорфность σ^n. ◆

Итак, из всех условий налагаемых гладкой ситуацией в случае n=1 мы оставили только одно – проективность модуля P. По всей видимости в общем случае тоже можно добиться существенного ослабления этих условий.

4.4. Связности и полный символ дифференциального оператора.

В этом параграфе мы переходим к кругу вопросов, которые в общей ситуации (на сколько нам известно) не рассматривались. Соответствующие результаты в классическом C^∞-случае получены в [32], гл. 4 с существенным использованием координатной техники.

Начнем с определения связности в модуле.

Определение 3. Связностью в модуле P называется д.о. ∇ первого порядка из P в $T^*A\otimes P$, удовлетворяющий условию $\sigma_\nabla = 1_{T^*A\otimes P}$.

Связь с классическим дифференциально-геометрическим оператором связности дается следующей конструкцией. Для любого $\partial\in D(A)$ с учетом отождествления (12) определен гомоморфизм $\theta_\partial : T^*A\otimes P \to P$, действующий по правилу θ: $\alpha\otimes p \mapsto \partial(\alpha)p$ обозначим ∇_∂ сквозное отображение:

$$P \to T^*A\otimes P \to P,$$

определяемое композицией $\nabla\theta_\partial$. Ясно, что ∇_∂ – д.о. первого порядка, причем условие $\sigma_\nabla = 1_{T^*A\otimes P}$ для ∇_∂ принимает вид:

$$\nabla_\partial(fp) = \partial(f)p + f\nabla_\partial(p),$$

который аналогичен соответствующему выражения для ковариантной производной сечения гладкого расслоения вдоль векторного поля ∂.

Далее, если не оговорено противное, мы полагаем, что модуль P – проективен. Следующая теорема является ключевым результатом, определяющим фундаментальную роль связностей в теории д.о. в категории проективных модулей.

Теорема 6. Связности в модуле P находятся во взаимно однозначном соответствии с расщеплениями точной последовательности (19).

Доказательство. В самом деле д.о. ∇ первого порядка из P в $T^*A\otimes P$ однозначно определяет A-линейное отображение π из $J_1(P)$ в $T^*A\otimes P$, а условие $\sigma_\nabla = 1_{T^*A\otimes P}$ означает, что это отображение является левым обратным к вложению σ^1 из (19), т.е.:

$$\sigma^1\pi = 1_{T^*A\otimes P}. \tag{22}$$

В самом деле, $\sigma_\nabla = 1_{T^*A\otimes P}$ означает, что $[\nabla, f](p) = \pi([j_1, f](p)) = df\otimes p$, с другой стороны, согласно определениям, $\sigma^1(df\otimes p) = [j_1, f](p)$, поскольку σ^1 – символ канонического оператора j_1. Но гомоморфизмы π, удовлетворяющие (22) находятся во взаимно однозначном соответствии с расщеплениями (19). Обратно, всякое отображение π определяет д.о. первого порядка из P в $T^*A\otimes P$. Если же оно к тому же расщепляет (19), т.е. удовлетворяет равенству (22) то символ соответствующего оператора тождественен. ◆

Итак, наличие связности в модуле P позволяет расщепить первую последовательность джетов, а значит и первую последовательность д.о. Таким образом, связность определяет изоморфизм:

$$\eta_\nabla\colon D_1(P, Q) \to \mathrm{Hom}_A(P, Q)\oplus\mathrm{Hom}_A(T^*A\otimes P, Q) \tag{23}$$

$$\eta_\nabla\colon \Delta\mapsto(\eta_1(\Delta), \eta_2(\Delta)),$$

где от ∇ зависит только первое слагаемое $\eta_1(\Delta)$, второе же есть просто главный символ оператора: $\eta_2(\Delta) = \sigma_\nabla$. Элемент $\eta_\nabla(\Delta)$ назовем полным символом оператора Δ относительно связности ∇. Простое сравнение определений показывает, что в случае операторов на кольце дифференцируемых функций и тривиальной связности, отвечающей данной системе координат, мы получим для $\eta_\nabla(\Delta)$ выражение типа (2).

Предположим теперь, что фиксированы расщепления всех коротких точных последовательностей (17) д.о. до порядка n включительно. В этом случае можно построить изоморфизм аналогичный (23) вида:

$$\eta\colon D_n(P, Q) \to \bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Hom}_A((S^iA)\otimes P, Q). \tag{24}$$

Покажем как это сделать. Пусть задан д.о. $\Delta\in D_n(P, Q)$. Точность коротких последовательностей (17) означает, в частности, что разность двух операторов порядка точно n с одинаковым символом есть оператор порядка $\le n$-1. Расщепление n-ой последовательности (17) означает, что каждому символу σ_Δ сопоставлен некоторый д.о. $\partial(\sigma_\Delta)$ соответствующего порядка (имеющий своим символом σ_Δ). Разность $\Delta_{n-1} = \Delta - \partial(\sigma_\Delta)$ является оператором порядка $\le n$-1. Опять найдем оператор (порядка n-1) сопоставляемый расщеплением символу оператора Δ_{n-1} и рассмотрим его разность с Δ_{n-1} получим оператор порядка $\le n$-2. Итерируя указанную процедуру мы приходим к последовательности изоморфизмов:

$$D_n(P, Q) \to D_{n-1}(P, Q)\oplus\mathrm{Hom}_A(T^*A\otimes P, Q) \to D_{n-2}(P, Q)\oplus\mathrm{Hom}_A(T^*A\otimes P, Q)\oplus$$

$$\oplus\mathrm{Hom}_A(S^2A\otimes P, Q) \to \ldots \to \bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Hom}_A((S^i A)\otimes P, Q).$$

Сквозной изоморфизм и будет изоморфизмом вида (24). Заметим еще, что расщепление точных последовательностей (17) эквивалентно расщеплению точных последовательностей (16). Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 7. Расщепление последовательностей (17) (или (16)) до n-ой последовательности включительно определяет изоморфизм вида (24). ◆

Как уже отмечалось выше в классической ситуации выписывание в координатах элемента $\eta(\Delta)$ дает выражение вида (2).

Выше было показано, что наличие связности позволяет расщепить короткие точные последовательности (16) и (17) при n=1. Оказывается, что с помощью связностей расщепляются все эти последовательности. Таким образом, получается уже не произвольно выбранное семейство расщеплений, как в теореме 7, но все расщепления индуцируются связностью.

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству соответствующей теоремы, изучим взаимодействие связности с тензорным произведением. Для простоты вместо рассмотрения семейств объектов (как мы поступали ранее) ограничимся парой объектов. Согласно теореме 1 настоящей главы всякий п.о. порядка $\leq n$ из пары модулей (P, P') пропускается через A-гомоморфизм модуля $J^n(P)\otimes J^n(P')$. Оказывается, что при наложении некоторого условия когерентности, его можно пропустить также через д.о. порядка $\leq n$ из модуля $P\otimes P'$, где n максимальный порядок среза по одной из переменных (упомянутое условие обеспечивает совпадение максимумов порядков срезов по различным переменным).

Теорема 8. Для любого п.о. ξ из пары (P, P') в Q тогда и только тогда существует единственный д.о. Δ_ξ из $P\otimes P'$ в Q, такой что $\deg \Delta_\xi \leq n$ (где число n – максимальный порядок срезов ξ по одной из переменных – инвариантно относительно выбора переменных) и коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & (P, P') \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ P\otimes P' \arrow[rr, "\Delta_\xi"] & & Q \end{tikzcd}, \qquad (25)$$

где ι – каноническое A-билинейное отображение, когда для любых p и q выполнено равенство:

$$\xi(fp, q) = \xi(p, fq). \qquad (26)$$

Доказательство. Во-первых заметим, что согласно определениям имеем:

$$\xi(fp, q) = \xi(p, fq)$$
$$\xi(p+p', q) = \xi(p, q) + \xi(p', q)$$

$$\xi(p, q+q') = \xi(p, q) + \xi(p, q')$$

Таким образом, отображение задаваемое на разложимых тензорах соотношением $\Delta_\xi(p\otimes q) = \xi(p, q)$ корректно продолжается по аддитивности на модуль $P\otimes P'$. Далее, значение всякой $(n+1)$-скобки (т.е. $n+1$ последовательных скобок) оператора Δ_ξ на разложимом тензоре $p\otimes q$ определяется $n+1$ скобками по p или $n+1$ скобками по q, поскольку имеется равенство:

$$[\Delta_\xi, f](p\otimes q) = [\xi_q, f](p) = [\xi_p, f](q),$$

где д.о. ξ_q и ξ_p определяются соотношением $\xi_q(p) = \xi_p(q) = \xi(p, q)$ и, следовательно, равна 0. Кроме того, равенство (26) влечет упоминавшуюся инвариантность: срезы по q имеют тот же максимальный порядок, что и срезы по p. Обратно, если п.о. пропускается через диаграмму (25), то равенство $f p\otimes q = p\otimes fq$ влечет (26). ◆

Таким образом, A-тензорное произведение, вообще говоря, не является функтором в категории Diff, т.е. не определены A-тензорные произведения д.о. порядка больше 0. Случай же п.о. удовлетворяющих условию (26) (назовем такие п.о. когерентными), представляет особый интерес.

Пусть ∇ и ∇' – связности на P и на P' соответственно. Определим п.о. из пары (P, P') в $P\otimes P'\otimes T^*A$ по формуле:

$$\xi(p, p') = \nabla(p)\otimes p' + p\otimes\nabla'(p')$$

(мы отождествляем модуль $P\otimes T^*A\otimes P'$ с модулем $P\otimes P'\otimes T^*A$ посредством канонического изоморфизма между ними). Очевидно, что мы действительно определили п.о. первого порядка. Кроме того п.о. ξ когерентен. В самом деле, можно написать:

$$\xi(fp, p') = \nabla(fp)\otimes p' + fp\otimes\nabla'(p') = p\otimes df\otimes p' + f\nabla(p)\otimes p' + fp\otimes\nabla'(p') =$$
$$= f\nabla(p)\otimes p' + (p\otimes p'\otimes df + fp\otimes\nabla'(p')) = f\nabla(p)\otimes p' + p\otimes\nabla'(fp') = \xi(p, fp').$$

Таким образом, согласно теореме 8, ξ пропускается через $P\otimes P'$. Легко видеть, что соответствующий д.о. первого порядка:

$$\nabla'': P\otimes P' \to P\otimes P'\otimes T^*A$$

имеет тождественный символ, т.е. является связностью. Введем обозначение $\nabla'' = \nabla\otimes\nabla'$ и назовем ∇' тензорным произведением связностей.

Определение 4. Связностью n-ого порядка на модуле P называется д.о. n-ого порядка из P в $P\otimes S^nA$ с тождественным символом.

Ясно, что связности первого порядка суть обычные связности вводимые определением 1. Формулируемая ниже теорема доказывается аналогично теореме 6.

Теорема 9. В гладкой ситуации связности n-ого порядка на модуле P находятся во взаимно однозначном соответствии с расщеплениями точной последовательности (16) (а, значит, и последовательности (17)). ◆

Перейдем к формулировке одного из основных результатов главы.

Теорема 10. i) В гладкой ситуации, если A – **Q**-алгебра, каждой паре связностей (∇, Ω), где ∇ – связность (первого порядка) в модуле P и Ω – связ

ность в модуле T^*A соответствует расщепление всех последовательностей (16) (и, соответственно, всех последовательностей(17)).
ii) Каждая пара (∇, Ω) определяет изоморфизм (24) для всех n.
Доказательство. Заметим во-первых что ii) следует непосредственно из i) и теоремы 7. Далее, рассмотрим следующую цепочку отображений:

$$\begin{gathered} P \xrightarrow{\nabla} P \otimes (T^*A) \xrightarrow{\nabla\otimes\Omega} P \otimes (T^*A) \otimes (T^*A) \xrightarrow{\nabla\otimes\Omega^{\otimes 2}} \dots \\ \dots \xrightarrow{\nabla\otimes\Omega^{\otimes(n-1)}} P \otimes (T^*A)^{\otimes n} \xrightarrow{1_P\otimes\lambda} P \otimes (S^n A) \end{gathered}, \tag{27}$$

где λ определено в конце § 4.1. Мы утверждаем, что сквозное отображение Θ для последовательности (27) является связностью n-ого порядка на модуле P. Действительно, поскольку все стрелки в (27) есть д.о. порядка 1, а последняя стрелка A-линейна, то их композиция Θ есть д.о. порядка n. Согласно теореме 3 о символе композиции, заключаем что символ оператора $(\nabla\otimes\Omega^{\otimes n})\circ(\nabla\otimes\Omega)\circ\ldots\circ\nabla$ есть гомоморфизм $1_P\otimes\iota$ из $P\otimes S^nA \to P\otimes(T^*A)^{\otimes n}$, где ι – каноническое вложение. Поскольку символ A-линейного отображения есть само это отображение, то окончательно символ Θ есть композиция:

$$(1_P\otimes\iota)(1_P\otimes\lambda) = 1_P\otimes\iota\lambda = 1_P \otimes 1_{S^nA} = 1_{P\otimes S^nA}.$$

Итак, Θ – связность порядка n. ◆

Определение 5. Изоморфизм (24) определяемый парой связностей (∇, Ω) согласно теореме 10 назовем изоморфизмом полного символа относительно пары (∇, Ω), а образ при этом изоморфизме произвольного оператора – полным символом этого оператора (относительно пары (∇, Ω)).

Таким образом, нами доказано, что для написания полного символа оператора, действующего из P достаточно наличия на модуле P дополнительной геометрической структуры – связности (если считать фиксированной связность в кокасательном модуле T^*A). Еще раз подчеркнем, что связность является глобальной структурой, что освобождает от привязки к фиксированной системе координат.

4.5. Приложение к системам линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В этом параграфе мы опишем одно приложение полученных результатов к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных (и/или систем обыкновенных дифференциальных уравнений) с переменными коэффициентами. Как уже отмечалось выше идея применения состоит в следующем: меняя связность и вычисляя полный символ относительно нее попытаемся найти такую связность, чтобы соответствующий символ был бы постоянным. На классическом языке это (не вполне адекватно) может быть высказано так: деформируя систему координат найдем такие координаты в которых данный оператор имеет постоянные коэффициенты.

Как уже отмечалось выше, в классическом случае изоморфизм (24) представляет собой сопоставление оператору вида (1) выражения вида (2). При этом соответствующая связность есть каноническая тривиальная связность отвечающая данной системе координат. Определим теперь класс операторов являющийся обобщением классических операторов с постоянными коэффициентами.

Для этого нам понадобятся две дополнительные конструкции новой связности по двум данным. Пусть ∇ и ∇' связности на P и на P' соответственно. Тогда определена связность на прямой сумме, действующая по правилу:

$$\nabla''(p, p') = (\nabla(p); \nabla'(p'))$$

(мы неявно использовали изоморфизм $(P\oplus P')\otimes T^*A \cong (P\otimes T^*A)\oplus(P'\otimes T^*A)$). Автоматическая проверка показывает, что ∇'' действительно связность.

Определим также связность $\mathrm{Hom}(\nabla, \nabla')$ на $\mathrm{Hom}(P, P')$ соотношением:

$$(\mathrm{Hom}(\nabla, \nabla')\varphi)(p) = \nabla'(\varphi(p)) - (\varphi\otimes 1_{T^*A})(\nabla(p)).$$

Справа написана разность значений на элементе p двух д.о. первого порядка из P в $P'\otimes T^*A$ с одинаковым символом равным $\varphi\otimes 1_{T^*A}$, а, значит, выражение справа A-линейно по p. Таким образом, мы корректно определили элемент $\mathrm{Hom}(\nabla, \nabla')\varphi\in\mathrm{Hom}(P, P')\otimes T^*A$, описав образы элементов $\mathrm{Hom}(\nabla, \nabla')\varphi\otimes p$ при каноническом спаривании:

$$(\mathrm{Hom}(P, P')\otimes T^*A)\otimes P \to P'\otimes T^*A.$$

Легко видеть, что соответствие $\varphi \mapsto \mathrm{Hom}(\nabla, \nabla')\varphi$ есть связность в A-модуле $\mathrm{Hom}(P, P')$.

Еще заметим, что конструкция тензорного произведения связностей позволяет по связности ∇ на P построить связность $\nabla^{\otimes n}$ на модуле $P^{\otimes n}$. Легко видеть, тогда что сквозное отображение цепочки:

$$S^n P \xrightarrow{\ \iota\ } P^{\otimes n} \xrightarrow{\ \nabla^{\otimes n}\ } P^{\otimes n}\otimes(T^*A) \xrightarrow{\ \lambda\otimes 1_P\ } S^n P\otimes(T^*A)$$

определяет связность на модуле S^nP.

Пусть теперь $\sigma = \sigma_{(\nabla,\,\Omega)}\Delta \in \bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Hom}_A((S^iA)\otimes P, Q)$ – полный символ оператора Δ и ∇' – связность на модуле Q. Тогда комбинируя все вышеперечисленные способы построения связностей можно получить связность в модуле $\bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{Hom}_A((S^i A) \otimes P, Q)$. Обозначим ее через $\Im$.

Определение 6. Д.о. Δ называется ковариантно постоянным (относительно тройки $(\nabla, \Omega, \nabla')$), если имеет место равенство:

$$\Im(\nabla, \Omega, \nabla')(\sigma_{(\nabla, \Omega)}\Delta) = 0. \tag{28}$$

Как обычно, проводя параллель с классическим случаем, отметим, что (28) означает равенство $a_\alpha(\mathbf{x}) = const$ в (2). Уточним эту параллель. Классической ситуации отвечает равенство $T^*A = A^m$, $P = A^s$, $Q = A^k$. В этом случае $\Omega = \nabla = \nabla' = d$ – обычный дифференциал вектор-функции, а д.о. Δ – есть система из k уравнений от s неизвестных функций от m аргументов. И уравнение (28) принимает вид:

$$\Im(\sigma(\Delta)) = 0, \tag{29}$$

где $\Im$ – тривиальная связность, порожденная системой координат вида (t^α, p^i, q^j), $0 \le |\alpha| \le n$, $1 \le i \le s$, $1 \le j \le k$ в A^r, $r = sk\sum_{i=0}^{n} C_i^{m+i-1}$. Таким образом, (29) означает что $\left(\frac{\partial a_{\alpha,i}^j}{\partial x_1}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m),\ldots,\frac{\partial a_{\alpha,i}^j}{\partial x_m}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m) \right) \equiv \mathbf{0}$, для всех i, j; т.е. $a_\alpha(\mathbf{x}) = const$.

Условие (28), записанное в координатах, является системой уравнений в частных производных n-ого порядка, вообще говоря, с переменными коэффициентами на коэффициенты связности ∇, Ω и ∇'. Если система (28) совместна, то решая ее, можно определить коэффициенты связностей относительно которых оператор Δ ковариантно постоянен.

Рассмотрим теперь частный случай оператора на гладких функциях на многообразии. Условие (28) имеет тогда вид:

$$\Im(\Omega)(\sigma_\Omega\Delta) = 0. \tag{30}$$

где Ω – связность на многообразии. Для того чтобы оператор Δ имел постоянные коэффициенты в обычном смысле в некоторой локальной системе координат, он должен быть рассмотрен в базисе ковариантно постоянном относительно связности Ω. Последнее, согласно [34], предл. 3 стр. 348, возможно если, и лишь если Ω локально является плоской (см. [34]), или, что то же самое, должен локально обнуляться тензор кривизны R_Ω связности (определение кривизны см., например, в [34]). Таким образом, нужно искать не произвольную связность, а плоскую и к уравнению (30) добавляется уравнение $R_\Omega = 0$, являющееся в локальных координатах системой дифференциальных уравнений 1-ого порядка с постоянными коэффициентами на коэффициенты связности.

Вообще говоря, за исключением случая $n = 1$ (систем первого порядка); система (30) переопределена. Она содержит $r = m^2 \sum_{i=0}^{n} C_i^{m+i-1}$ уравнений на m^3 неизвестных функций связанных кроме того еще и другими соотношениями (например: $R_\Omega = 0$), и ее, как и систему (28), вкупе с условием $R_\Omega = 0$ следует рассматривать скорее как систему неявных дифференциальных условий на коэффициенты оператора, при которых существует преобразование координат, такое что коэффициенты "выпрямляются", т.е. становятся постоянными. Из вышеизложенного следует теорема.

<u>Теорема 11.</u> Если существует плоская связность на многообразии M удовлетворяющая уравнению (30) для некоторого оператора Δ действующего на гладких функциях на M, то существует покрытие M координатными окрестностями такое, что в каждой из этих окрестностей оператор имеет постоянные коэффициенты.

Заметим, что, поскольку существование плоской связности, как указано выше, является необходимым условием существования покрытия M координатными окрестностями такого, что в каждой из этих окрестностей оператор имеет постоянные коэффициенты, то в случае нетривиальности касательного расслоения над односвязным многообразием ни для какого д.о. не существует покрытия указанного в теореме 11. Так, например, не существует покрытия двухмерной сфера S^2 такого, чтобы какой-либо глобальный д.о. имел бы постоянные коэффициенты в каждой системе координат, но такие покрытия есть на торе T^2 и сфере S^3.

Принимая во внимание приведенные выше соображения, введем в рассмотрение два вложенных класса д.о.

<u>Определение 7.</u> Д.о. Δ называется квазистационарным (к.д.о.), если он ковариантно постоянен относительно некоторой тройки связностей $(\nabla, \Omega, \nabla')$; и стационарным (с.д.о.), если эти связности могут быть выбраны плоскими.

С.д.о. есть в точности аналоги операторов с постоянными коэффициентами, но их класс слишком узок. Так не существует с.д.о. действующих на сечениях векторного расслоения над односвязным многообразием с нетривиальным касательным расслоением, в то время как класс к.д.о. весьма велик. С другой стороны, задача интегрирования с.д.о. представляется существенно более легкой по сравнению с интегрированием к.д.о. ввиду отсутствия "некоммутативностей" порождаемых тензором кривизны. Построение соответствующих теорий интегрирования полностью выходит за рамки данной работы.

4.6. Тензор кручения связности.

Этот параграф использует собственную нумерацию, отдельную от общей нумерации главы.

Выше мы не раз отмечали фундаментальную роль операторов связности: они позволяют "выявить" полный символ произвольного д.о., определить д.о. с постоянными коэффициентами и записать уравнения выражающие условия существования систем координат, в которых оператор имеет постоянные коэффициенты. В связи с этим, исследование свойств связностей (вообще говоря, составляющее предмет целой математической теории – теории связностей) представляет непосредственный интерес для ГТДУ. Этот параграф посвящен изложению некоторых результатов о связностях в классических многообразиях.

Среди инвариантов связности на многообразии важнейшими, как известно, являются тензоры кривизны и кручения. Классическая геометрическая трактовка этих тензоров хорошо известна (см., например, [35] стр. 417-420, 494-507). Однако в отличие от тензора кривизны, геометрическая трактовка тензора кручения некоторыми авторами считается не вполне удовлетворительной (см., например, [25] стр. 50). В настоящем параграфе предлагается новая геометрическая интерпретация тензора кручения связности на многообразии, которая на наш взгляд отличается от классической инвариантностью и геометрической наглядностью конструкции. По нашим сведениям предложенная трактовка в действительности является новой (см., например, обзорные статьи [29], [37]).

Для данной связности ∇ (здесь и далее мы пишем “связность” вместо “линейная связность”) на многообразии M рассмотрим сопряженную связность ∇^* в кокасательном расслоении. Ей соответствует некоторое распределение H^* на многообразии T^*M. (В дальнейшем мы часто не делаем терминологического различия между связностью и соответствующим распределением.) Пусть $H^{*\perp}$ – распределение ортогональное H^* в канонической симплектической структуре кокасательного многообразия. Мы докажем, что $H^{*\perp}$ также является связностью. Один из основных результатов параграфа состоит в следующем:

Пусть $\nabla^{\perp}$ оператор связности сопряженной к $H^{*\perp}$, тогда $T = \nabla - \nabla^{\perp}$ – тензор кручения связности ∇.

Как следствие получаем, что тензор кручения тогда и только тогда равен нулю, когда распределение H^* лагранжево, т.е. H^*_p лагранжево подпространство симплектического пространства T_pT^*M, где $p \in T^*M$. Таким образом, можно сказать, что тензор кручения связности ∇ есть “мера нелагранжевости” сопряженной связности ∇^*. Точные формулировки приведены ниже.

Определение линейной связности в векторном расслоении как распределения на тотальном пространстве расслоения не пользуется популярностью, скорее всего, по причине неинвариантности фразы: “горизонтальное распределение, линейно зависящее от координат вдоль слоя”, но обладает преимуществом геометрической наглядности. Так как наша конструкция опирается именно на это определение, мы приводим его инвариантную формулировку см. определение 1.

Связность $\nabla^{\perp}$ можно построить непосредственно по ∇, т.е. не обращаясь к T^*M. Связь между ∇ и $\nabla^{\perp}$ осуществляется посредством канонической инволюции второго касательного расслоения (см. теорему 6). В операторной интерпретации связь эта очевидна и дается формулой $\nabla^{\perp}{}_X Y=\nabla_Y X+[X,Y]$. Аналогичная связь имеется между операторами связностей $H^{*\perp}$ и H^*, которые мы обозначим $\nabla^{*\perp}$ и ∇^* соответственно:

$$\langle \nabla^{*\perp}{}_X\,\alpha, Y\rangle = \langle \nabla^*{}_Y\,\alpha, X\rangle + \langle d\alpha, X\wedge Y\rangle$$

Наша терминология и обозначения близки к терминологии и обозначениям принятым в [34]. Векторное расслоение π: E$\to$M мы обычно обозначаем просто через E, кроме того положим n=dimE и m=dimM. Модуль сечений расслоения E обозначается через ***E***, модули векторных и ковекторных полей – через ***T*** и ***T**** соответственно. E_x– означает слой расслоения E над $x\in M$. Для координат используются следующие обозначения: $x^i=\mathbf{x}$ – для координат точки многообразия; $X^i=\mathbf{X}$ – для координат вектора из TM в базисе $\partial/\partial x^i$; $p^i=\mathbf{p}$ – для координат вектора из T^*M в базисе dx^i; $(Y^i, \xi^i)=(\mathbf{Y}, \xi)$ – для координат вектора из TTM в базисе $\partial/\partial x^i$; $\partial/\partial X^i$; $a^i=\mathbf{a}$ – для координат в слое расслоения E и т. д.

Пусть E и F – векторные расслоения над M. Мы отождествляем расслоения $E^*\otimes F$ и Hom(E,F) посредством канонического изоморфизма между ними. Если S сечение расслоения $E^*\otimes F$ и X сечение E, то S(X) или $\langle S;X\rangle$ обозначает соответствующую свертку. Кроме того, проекции различных расслоений мы часто обозначаем одной и той же буквой π. Если f: M' $\to$ M – гладкое отображение, то для поднятых посредством f на M' объектов (гомоморфизмов, расслоений, сечений и т.д.) мы часто используем те же обозначения, что и для исходных объектов над M.

Пусть $\pi\colon E\to M$ – векторное расслоение. Дифференциал $d\pi$: TE $\to$ TM проекции π определяет морфизм расслоений TE $\to \pi^*(TM)$ над E, который мы тоже обозначим $d\pi$. Ker($d\pi$) – подрасслоение вертикальных подпространств в TE. Так как линейное пространство изоморфно своему касательному пространству в любой точке, то определено вложение ι: $\pi^*E \to$ TE расслоений над E, отождествляющее слой расслоения π^*E, рассматриваемый как подмногообразие в E, с его касательным пространством в данной точке; причем $\iota(\pi^*E)=\mathrm{Ker}(d\pi)$, т.е. следующая короткая последовательность расслоений составленная из ι и $d\pi$:

$$0\to \pi^*E\to TE\to \pi^*(TM)\to 0 \qquad (1)$$

точна (см. [24], стр. 155).

Связность H в расслоении E можно интерпретировать как расщепление (1) удовлетворяющее дополнительно “условию горизонтальности”, которое можно выразить следующим образом: распределение H должно линейно зависеть от координат вдоль слоя расслоения E.

Чтобы придать этому определению инвариантную форму мы воспользуемся конструкцией касательного расслоения к расслоению E. Тройка (TE, $d\pi$, TM) наделяется структурой 2n-мерного векторного расслоения (см. [24], стр. 152), которое называется касательным расслоением к расслоению E.

Мы явно опишем линейную структуру в слоях расслоения TE. Пусть E_1 и E_2 пара векторных расслоений над M, и $E_1 \oplus E_2$ их сумма Уитни. Многообразие $T(E_1 \oplus E_2)$ обладает структурой двойного расслоения с базами TM и $E_1 \oplus E_2$. Пусть теперь $TE_1 \oplus TE_2$ – сумма Уитни над TM расслоений TE_1 и TE_2. Определим проекцию π: $TE_1 \oplus TE_2 \to E_1 \oplus E_2$ по формуле:

$$\pi(\xi_1; \xi_2) = (\pi_1(\xi_1); \pi_2(\xi_2)),$$

где $\pi_i: TE_i \to E_i$ – канонические проекции. Из коммутативности диаграммы:

$$\begin{tikzcd} TE_i \arrow[r] \arrow[d, "d\pi_i"] & E_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ TM \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

следует, что отображение π корректно определено. Тройка:

$$(TE_1 \oplus TE_2; \pi; E_1 \oplus E_2)$$

является векторным расслоением со слоем:

$$(TE_1 \oplus TE_2)_{(a,b)} = \{(\xi_1; \xi_2) / \xi_1 \in T_aE_1; \xi_2 \in T_bE_2; \xi_i \in (TE_1 \oplus TE_2)_X; X \in TM; i=1;2\},$$

где $a \in E_1$; $b \in E_2$. Сложение в $(TE_1 \oplus TE_2)_{(a,b)}$ определяется по формуле:

$$(\xi_1; \xi_2) + (\eta_1; \eta_2) = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2),$$

где $\xi_1 + \eta_1$ и $\xi_2 + \eta_2$ вычисляются в T_aE_1 и T_bE_2 соответственно. Если $\eta_i \in (TE_1 \oplus TE_2)_Y$; i=1;2, то $\xi_i + \eta_i \in (TE_1 \oplus TE_2)_{X+Y}$. Умножение на число определяется аналогично.

Теорема 1. Двойные расслоения $T(E_1 \oplus E_2)$ и $TE_1 \oplus TE_2$ канонически изоморфны.

Доказательство. Пусть ρ_i: $E_1 \oplus E_2 \to E_i$ – отображения проектирования. По свойству универсальности суммы Уитни найдется единственный морфизм ι, такой что коммутативна диаграмма (над TM):

$$\begin{tikzcd} & T(E_1 \oplus E_2) \arrow[dl, "d\rho_1"'] \arrow[d, "\iota"] \arrow[dr, "d\rho_2"] & \\ TE_1 & TE_1 \oplus TE_2 \arrow[l, "\delta_1"'] \arrow[r, "\delta_2"] & TE_2 \end{tikzcd}$$

Из $\iota(a)=0$ следует, что $d\rho_i(a) = \delta_i(\iota(a)) = 0$. Но $d\rho_1(a) = d\rho_2(a) = 0$ влечет $a=0$ (последнюю импликацию легче всего усмотреть в координатах). Итак, ι – мономорфизм. Теперь из совпадения размерностей расслоений $T(E_1 \oplus E_2)$ и

$TE_1 \oplus TE_2$ следует, что ι – изоморфизм (над TM). Аналогично доказывается, что ι – изоморфизм и над $E_1 \oplus E_2$. ◆

В дальнейшем мы отождествляем многообразия $T(E_1 \oplus E_2)$ $TE_1 \oplus TE_2$ посредством ι. Таким образом можно написать:

$$T(E_1 \oplus E_2) = \{(\xi_1, \xi_2)/\xi_i \in TE_i \,;\, d\pi_1(\xi_1) = d\pi_2(\xi_2)\},$$

$$[T(E_1 \oplus E_2)]_X = \{(\xi_1, \xi_2)/\xi_i \in TE_i \,;\, d\pi_1(\xi_1) = d\pi_2(\xi_2) = X\},\ X \in TM,$$

$$[T(E_1 \oplus E_2)]_{(a,b)} = \{(\xi_1, \xi_2)/\xi_1 \in T_a E_1 \,;\, \xi_2 \in T_b E_2 \,;\, d\pi_1(\xi_1) = d\pi_2(\xi_2)\},\ a \in E_1;\ b \in E_2.$$

Каноническое вложение $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\lambda \mapsto (\lambda, 0)$ определяет вложение расслоений $i': \mathbb{R}_{TM} \to T\mathbb{R}_M$. В самом деле: $\mathbb{R}_{TM} = TM \times \mathbb{R}$, а:

$$T\mathbb{R}_M = T(M \times \mathbb{R}) = TM \times \mathbb{R}^2$$

и нужно положить $i' = 1_{TM} \times i$. Если теперь $\Pi: E \times \mathbb{R}_M \to E$ – морфизм умножения, то положим:

$$\Pi' = d\Pi \circ (1_{TE} \times i'): TE \times \mathbb{R}_{TM} \to TE.$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть $\Sigma: E \oplus E \to E$ –морфизм сложения, тогда сложение и умножение в расслоении $d\pi: TE \to TM$ определяются по формулам i) $\xi + \eta = d\Sigma(\xi, \eta)$; ii) $\lambda\xi = \Pi'(\xi, \lambda)$, где $\xi, \eta \in (TE)_X$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $X \in TM$.

Доказательство. i) Фиксируем тривиализацию (U, φ). Тогда дифференциал $d\Sigma_{(a,b)}$ в точке $(a, b) \in E \oplus E$ задается матрицей:

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_m & E_m \end{pmatrix},$$

где E_n– единичная матрица размера $n \times n$. И, следовательно, $d\Sigma$ действует по правилу:$d\Sigma_{(a,b)}$: $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{X}, \xi, \eta) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{a}+\mathbf{b}; \mathbf{X}, \xi+\eta)$, где $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{X}, \xi, \eta)$ – координаты вектора $(\xi, \eta) \in T(E \oplus E)$. Аналогичное выражение в координатах имеет сумма $\xi + \eta$.

ii) Дифференциал $d\Pi_{(a,\lambda)}$ в точке $(a, \lambda) \in E \oplus \mathbb{R}_M$ задается матрицей:

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda E_m & a \end{pmatrix},$$

и, следовательно, переводит вектор с координатами $(\mathbf{X}, \xi, t) \in T_{(a,\lambda)}(E \oplus \mathbb{R}_M)$ в вектор с координатами $(\mathbf{X}, \lambda\xi + t\mathbf{a}) \in T_{\lambda a}E$. Тогда Π' действует по правилу:

$$(a, X, \xi, \lambda) \mapsto (a, X, \xi, \lambda, 0) \mapsto (\lambda a, X, \lambda\xi),$$

т.е. является умножением вектора с координатами $(\mathbf{a}, \xi) \in T_X E$ на λ, где $X \in T_{\pi(a)}M$. ◆

Теперь не представляет труда сформулировать инвариантные “условия горизонтальности”, (т.е. условия необходимые и достаточные для того чтобы распределение на многообразии E задавало связность в расслоении E).

<u>Теорема 3.</u> Распределение H на E расщепляющее последовательность (1) является связностью тогда и только тогда, когда H есть подрасслоение двойного расслоения TE.

Доказательство. Пусть H – расщепление (1) и (U, φ) – некоторая тривиализация. Тогда найдется единственный базис аннулятора H над U вида:

$$\vartheta^i = da^i + e^i_k(\mathbf{x},\mathbf{a})dx^k,$$

где ϑ^i – линейные 1-формы, составляющие базис Ann(H) над U, (**x**, **a**) – координаты в тривиализации (U,φ) (см. [34], стр 178). В случае связности функции e^i_k должны быть линейны по **a**. Линейность же e^i_k по **a** равносильна тому, что H есть векторное расслоение над TM. В самом деле: пусть $(\xi_1;\xi_2)\in[H\oplus H]_X$, $X\in TM$. Это значит, что

$$\vartheta(\xi_i)=\xi_i+\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)\mathbf{X}=0,$$

где i=1;2 и ($\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{a}_i$, ξ_i) – координаты вектора ξ_i в (U,φ). $\xi_1+\xi_2\in H_X$ тогда и только тогда, когда:

$$\vartheta(\xi_1+\xi_2)=\xi_1+\xi_2+\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\mathbf{X}=0.$$

Таким образом, $\vartheta(\xi_1+\xi_2)= =\vartheta(\xi_1)+\vartheta(\xi_2)$, т.е. $\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)= \mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_1)+\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_2)$. Аналогично доказывается, что $\mathbf{e}(\mathbf{x}, l\mathbf{a})=l\mathbf{e}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ тогда и только тогда, когда $l\cdot H=H$, где $l\in\mathbb{R}$. ◆

Итак мы пришли к следующему инвариантному определению связности в терминах распределений на E:

Определение 1. Связностью в векторном расслоении E называется подрасслоение двойного расслоения TE, расщепляющее (1).

Пусть ∇ – связность, а (U, φ) – тривиализация в расслоении E. Тогда на U определена тривиальная связность ∇^φ, которая задается равенством $\nabla^\varphi{}_X s=(Xf^i)s_i$, где s_i – локальный базис сечений, отвечающий тривиализации φ, и $s=f^is_i$. Далее, на U определен тензор Кристоффеля Γ задаваемый равенством:

$$\Gamma = \nabla - \nabla^\varphi. \tag{2}$$

Пусть ∇^* – сопряженная связность, а φ^* тривиализация сопряженного расслоения E^* отвечающая тривиализации φ. Имеет место следующая

Лемма 1. i) Тривиальная связность отвечающая тривиализации φ^* сопряжена связности ∇^φ, т.е. имеет место равенство $(\nabla^\varphi)^*=\nabla^{\varphi^*}$.

ii) Если через Γ^* обозначить тензор Кристоффеля связности ∇^*, то операторы Γ(X) и $-\Gamma^*(X)$ – сопряжены:

$$\Gamma(X)^* = -\Gamma^*(X). \tag{3}$$

Доказательство. i) Согласно определениям имеем:

$$\langle\nabla^{\varphi^*}_X\alpha,Y\rangle=(X\alpha_i)Y^i$$

$$\langle(\nabla^{\varphi})^*_X\alpha,Y\rangle=X\langle\alpha,Y\rangle-\langle\alpha,\nabla^{\varphi}_X\rangle=X(\alpha_iY^i)-\alpha_i(XY^i)=$$

$$=(X\alpha_i)Y^i+\alpha_i(XY^i)-\alpha_i(XY^i)=(X\alpha_i)Y^i=\langle\nabla^{\varphi^*}_X,Y\rangle$$

ii) Учитывая i) и вспоминая определение Γ и Γ^* можно написать:

$$\langle\Gamma^*(X,\alpha),Y\rangle = \langle(\nabla^*_X - \nabla^{\varphi^*}_X)\alpha,Y\rangle = \langle\nabla^*_X\alpha,Y\rangle - \langle\nabla^{\varphi^*}_X\alpha,Y\rangle =$$

$$= X\langle\alpha,Y\rangle - \langle\alpha,\nabla_X Y\rangle - \langle\nabla^{\varphi^*}_X\alpha,Y\rangle = (X\langle\alpha,Y\rangle - (\langle\alpha,\nabla^{\varphi}_X Y\rangle + \langle\nabla^{\varphi^*}_X\alpha,Y\rangle)) - \langle\alpha,\Gamma(X,Y)\rangle =$$

$$= X\langle\alpha,Y\rangle - X\langle\alpha,Y\rangle - \langle\alpha,\Gamma(X,Y)\rangle = -\langle\alpha,\Gamma(X,Y)\rangle$$

что и доказывает ii). □

Пусть теперь H – связность на многообразии M, H^* – сопряженная связность в T^*M. Пусть также Γ – тензор Кристоффеля H в некоторой системе координат (U, x^i), Γ^* – тензор Кристоффеля H^*, а $H^{*\perp}$ – распределение ортогональное к H^* в канонической симплектической структуре на T^*M, (т.е. $H^{*\perp}{}_p$ есть ортогональное дополнение к $H^*{}_p$ в симплектическом пространстве T_pT^*M, $p\in T^*M$.)

<u>**Теорема 4.**</u> $H^{*\perp}$ является связностью с тензором Кристоффеля $\Gamma^{*\perp}$ определяемым по формуле:

$$\Gamma^{*\perp}(\alpha) = (\Gamma^*(\alpha))^*, \tag{4}$$

где α – произвольная линейная форма.

Поясним (4): $\Gamma^*(\alpha)$ является оператором (над U) из расслоения TM в T^*M. Сопряженный оператор $(\Gamma^*(\alpha))^*$ действует из $T^{**}M$ в T^*M и, в силу отождествления $T^{**}M = TM$, $(\Gamma^*(\alpha))^*$: $TM \to T^*M$, там же по определению должен действовать $\Gamma^{*\perp}(\alpha)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что, если (L, ω) – симплектическое пространство, то L^* каноническим образом наделяется симплектической структурой; соответствующую форму будем обозначать той же буквой ω. Временно обозначим коэффициенты тензора Γ^* через Γ^i_{jk}. Для распределений H^* и $H^{*\perp}$ найдутся 1-формы θ^i и ϑ^i такие что:

$$\theta^i = dp^i + \Gamma^i_{jk}\, p^j\, dx^k \tag{5}$$

$$\vartheta^i = dp^i + e^i_k\, dx^k, \tag{6}$$

где p^i – координаты в базисе dx^i, e^i_k – некоторые гладкие функции на T^*U (см. [34]). Ввиду ортогональности H^* и $H^{*\perp}$ все формы θ^i ортогональны всем формам ϑ^i в индуцированной симплектической структуре:

$$\Omega(\theta^i; \vartheta^{i'}) = 0, \tag{7}$$

где Ω – симплектическая форма на T^*M. С другой стороны, согласно (5), (6) имеем:

$$\Omega(\theta^i; \vartheta^{i'}) = \Omega(dp^i; dp^{i'}) + e^{i'}_{k'}\,\Omega(dp^i; dx^{k'}) +$$
$$+ \Gamma^i_{jk}\, p^j\, \Omega(dx^k; dp^{i'}) + \Gamma^i_{jk}\, p^j\, e^{i'}_{k'}\Omega(dx^k; dx^{k'}).$$

Здесь первое и четвертое слагаемые равны нулю, кроме того: $\Omega(dx^k; dp^m) = -\delta^{km}$. Отсюда: $\Omega(\theta^i; \vartheta^{i'}) = e_i^{i'} - \Gamma^i_{ji'}\, p^j$. А ввиду (7) из последней формулы получаем $e_i^{i'} = \Gamma^i_{ji'}\, p^j$. Итак функции e^i_k линейны по p^j, т.е. можно написать $e^i_k = \overline{\Gamma}^i_{jk}\, p^j$. Сравнивая две последние формулы получим $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^k_{ji}$. Эта формула есть просто координатная форма записи равенства (4). ◆

Рассмотрим четверку связностей: H, H^*, $H^{*\perp}$, $(H^{*\perp})^*$. Введем обозначения: $H^{*\perp}$=H', $(H^{*\perp})^*$=H''. Итак H и H'' – связности в TM, а H^* и H' – в T^*M. Соответствующие ковариантные производные обозначим ∇, ∇^*, ∇', ∇''. Тогда определены тензоры $\nabla - \nabla'' \in T^*M\otimes T^*M\otimes TM$; $\nabla^*-\nabla' \in T^*M\otimes TM\otimes TM$. Имеет место следующая

<u>Теорема 5.</u> i) Имеет место равенство:

$$\nabla - \nabla'' = T, \tag{8}$$

где T – тензор кручения ∇.

ii) Связь между тензорами T и T^* дается формулой:

$$T^*(X) = -T(X)^*, \tag{9}$$

где $X \in TM$.

Доказательство. i) Фиксируем систему координат (U,x^i) и обозначим тензоры Кристоффеля наших связностей через Γ, Γ^*, Γ', Γ'' соответственно. Согласно формуле (3) имеем:

$$\langle \Gamma^*(X,\alpha);Y\rangle = -\langle \alpha,\Gamma(X,Y)\rangle \tag{10}$$

$$\langle \Gamma'(X,\alpha);Y\rangle = -\langle \alpha,\Gamma''(X,Y)\rangle \tag{11}$$

Кроме того формулу (4) можно переписать в виде:

$$\langle \Gamma'(X,\alpha);Y\rangle = \langle \Gamma^*(Y,\alpha);X\rangle \tag{12}$$

Подставляя (12) и (10) последовательно в (11), получим:

$$\langle \alpha;\Gamma''(X,Y)\rangle = -\langle \Gamma'(X,\alpha);Y\rangle = -\langle \Gamma^*(Y,\alpha);X\rangle =$$
$$= \langle \alpha;\Gamma(Y,X)\rangle$$

Таким образом:

$$\Gamma''(X, Y) = \Gamma(Y, X)$$

Согласно определению тензора Кристоффеля, можем написать:

$$(\nabla - \nabla'')(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla''_X Y = (\nabla^\varphi{}_X Y+\Gamma(X,Y)) - (\nabla^\varphi{}_X Y+\Gamma''(X,Y))=$$
$$= \Gamma(X, Y) - \Gamma''(X, Y) = \Gamma(X, Y) - \Gamma(Y, X) = T(X, Y).$$

ii) Формула (9) получается очевидной выкладкой:

$$\langle T^*(X,\alpha); Y\rangle = \langle \nabla^*{}_X\alpha, Y\rangle - \langle \nabla'_X\alpha, Y\rangle = X\langle \alpha, Y\rangle - \langle \alpha, \nabla_X Y\rangle -$$
$$- X\langle \alpha, Y\rangle + \langle \alpha, \nabla'_X Y\rangle = \langle \alpha, (\nabla'_X - \nabla_X)Y\rangle = - \langle \alpha, T(X,Y)\rangle. \ \blacklozenge$$

Таким образом, “новый” инвариант T^* по сути не дает ничего нового.

Теперь докажем формулы анонсированные в начале параграфа.

<u>Лемма 2.</u> Имеют место равенства:

i) $\nabla''_X Y = \nabla_Y X + [X,Y]$

ii) $\langle \nabla'_X\alpha, Y\rangle = \langle \nabla^*{}_Y\alpha, X\rangle + d\alpha(X,Y)$

Доказательство. Формула i) сразу следует из (8) и хорошо известного выражения для тензора кручения, часто принимаемого за определение:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Равенство же ii) проверяется формальной выкладкой:

$$\langle \nabla'_X\alpha; Y\rangle = X\langle \alpha; Y\rangle - \langle \alpha; \nabla''_X Y\rangle = X\langle \alpha; Y\rangle - \langle \alpha; \nabla_Y X\rangle -$$
$$- \langle \alpha; [X,Y]\rangle = (X\langle \alpha; Y\rangle - Y\langle \alpha; X\rangle - \langle \alpha; [X,Y]\rangle) + Y\langle \alpha; X\rangle - \langle \alpha; \nabla_Y X\rangle =$$

$= d\alpha(X, Y) + \langle \nabla^*{}_Y \alpha; X \rangle$. ◆

Таким образом, мы полностью описали связи между операторами ∇, ∇^*, ∇', ∇''. Их можно изобразить так:

$$\begin{tikzcd} \nabla \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \nabla^* \arrow[d, leftrightarrow] \\ \nabla'' \arrow[r, leftrightarrow] & \nabla' \end{tikzcd}$$

где горизонтальные стрелки – суть переходы к сопряженной связности, а вертикальные стрелки описаны в лемме 2.

Аналогичная картина для распределений H, H^*, H', H'' осталась неполной:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, leftrightarrow, "?"] \arrow[d, leftrightarrow, "?"] & H^* \arrow[d, leftrightarrow] \\ H'' \arrow[r, leftrightarrow, "?"] & H' \end{tikzcd}$$

.

Здесь мы описали лишь правую вертикальную стрелку (см. теорему 4). О горизонтальных стрелках можно сказать следующее: связности на E находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями в расслоении реперов R(E) (соответствующую геометрическую конструкцию см. [34]), а $R(E) \cong R(E^*)$. Этим мы и ограничимся. Опишем теперь левую вертикальную стрелку. Для этой цели воспользуемся канонической инволюцией s второго касательного расслоения, которая определяется так (см. [24]):

Предложение-определение 2. Существует единственный морфизм s расслоений:

$$\begin{tikzcd} TTM \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & TTM \arrow[dl, "d\pi"] \\ & TM & \end{tikzcd}$$

,

такой что: i) $s^2 = 1_{TTM}$; ii) для любой гладкой функции f на M $d(df)\circ s = d(df)$. ◆

Ясно, что при действии s подрасслоения двойного расслоения TTM переходят в подрасслоения. Для связностей имеет место

Теорема 6. Если H – связность на M, тогда s(H) также связность. Более того, имеет место равенство $s(H) = H''$.

Доказательство. Пусть (U,x^i) – система координат на M и Γ – тензор Кристоффеля связности H. Тогда H (над U) состоит из векторов с координатами $(\mathbf{x},\mathbf{X};\mathbf{Y}, -\Gamma^i_{jk}X^jY^k)$. Инволюция s в координатах имеет вид s: $(\mathbf{x},\mathbf{X};\mathbf{Y},\xi) \mapsto (\mathbf{x},\mathbf{Y};\mathbf{X},\xi)$. Из этого можно заключить, что s(H) состоит из векторов вида $(\mathbf{x},\mathbf{Y};\mathbf{X}, -\Gamma^i_{jk}X^jY^k)$, т.е. символы Кристоффеля связности s(H) суть Γ^i_{kj} и совпадают с символами Кристоффеля связности H". ◆

ЛИТЕРАТУРА.

1. Darboux G. "Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal". P. 1-4 – P.: Gauthier-Villars, 1894-1925.
2. Gancarzewicz, J.; Kolář I. "Natural affinors on the extended r-th order tangent bundles.» Rand. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. №30 (1993), 95-100.
3. Goldschmidt H. "Existence theorems for analytic linear partial differential equations." – Ann. Math., 1967, **86**:2, p. 246-270.
4. Hermann R. "Cartan's geometric theory of partial differential equations". – Adv. Math.6 1965, **1**:36 p. 265-317.
5. Janet M. "Les systèmes d'équations aux dérivées partielles". – P.: Gauthier-Villars, 1927.
6. Kolář, Ivan. "An abstract characterization of the jet spaces.» Cahier Topologie Géom. Différentielle Catégoriques 34(1993), №2, 121-125.
7. Kolář, Ivan. "General natural bundles and operators.»
8. Kolář, Ivan. "Natural operations in differential geometry.» Springer-Verlad, Berlin, 1993.
9. Kolář, Ivan. "Natural transformations of higher order tangent bundles and jet spaces.» Časopis Pěst. Mat. 114 (1989) №2, 181-186.
10. Kolář, Ivan. "On the algebraic structure on the jet prolongation of firbed manifolds.» Czechoslovak Math. J. 40 (115), 1990, №4, 601-611.
11. Kolář, Ivan. "Torsion of connections on some natural bundles.» Differential Geom. Appl. 2 (1992), №1, 1-16.
12. Krasilshchik, I. S. "Some new cohomological invariants for nonlinear differential equations», Differential Geom. Appl. 2 (1992), №4, 307-350.
13. Lie S. "Gesammelte Abhandlungen". Bd 1-6. – Leipzig: Teubner; Oslo: Aschehoug, 1922-1937.
14. Riquier Ch. "Les systèmes d'équations aux dérivées partielles". – P.: Gauthier-Villars, 1910.
15. Vinogradov A. M. "An informal introduction to the geometry of jet spaces.» Conference on Differential Geometry and Topology (Sardinia, 1988).
16. Vinogradov A. M. "The category of differential equations and its significance." – In.: Proc. of Int. Conf. on global Diff. Geom. at Nove Město. – Brno, 1984.
17. Бурбаки Н. "Коммутативная алгебра". – М.: Мир, 1971.
18. Виноградов А. М. "Категория нелинейных дифференциальных уравнений". – В сб. Уравнения на многообразиях. – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1982, с. 26-51.
19. Виноградов А. М. "Некоторые гомологические системы, связанные с дифференциальным исчислением в коммутативных алгебрах". – УМН, 1979, том 34, вып. 6 с. 145-150.

20. Виноградов А. М. и др. "Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений" – М.: Наука, 1986.
21. Виноградов А. М., Красильщик И. С. "Что такое гамильтонов формализм?" – УМН,1975, т. 30, вып. 1, с. 173-198.
22. Виноградов М. М. "Расширения полей и расширения линейных дифференциальных операторов." – Мат. Заметки, 1981, т. 30, №2, с. 237-248.
23. Виноградов М. М. "Теория вычетов в коммутативных алгебрах". – УМН, 1980, т. 35, вып. 2, с. 203-204.
24. Годбийон К. "Дифференциальная геометрия и аналитическая механика." –М.: Мир, 1973 г.–188 с.
25. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. "Риманова геометрия в целом." – М.: Мир, 1971 г.–343 с.
26. Картан Э. "Внешние системы и их геометрические приложения". – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1962.
27. Красильщик И. С. "Некоторые новые когомологические инварианты нелинейных дифференциальных уравнений.», Изв. ВУЗов, Мат., 1993, №1, 27-37.
28. Курант Р. "Уравнения с частными производными". – М.: ИЛ, 1964.
29. Лумисте Ю. Г. "Теория связностей в расслоенных пространствах." // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия.–1971.–с. 123-168.
30. Лычагин В. В. "Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка". – ДАН СССР, 1973, т. 210, №3; УМН, 1975 т. 30 вып. 1, с. 101-171.
31. Лычагин В.В., Рубцов В.Н. "Локальная классификация дифференциальных уравнений Монжа-Ампера". – ДАН СССР, 1983, т. 272, №1, с. 34-38.
32. Пале Р. "Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе". – М.: Мир, 1970.
33. Поммаре Ж. "Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли". – М.: Мир, 1983.
34. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. "Дифференциальная геометрия." – М.: Наука, 1988 г.–496 с.
35. Рашевский П. К. "Риманова геометрия и тензорный анализ." –М.: Гостехиздат, 1967.–664 с.
36. Спенсер Д. К. "Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных." – Математика (сб. переводов), 1970, т. 14, №2, с. 66-90; №3 с. 99-126.
37. Шапуков Б. Н. "Связности на дифференцируемых расслоениях." // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.–1983.–15.–с. 61-93.
38. Цаленко М.Ш., Шульгейфер Е.Г. "Основы теории категорий." – М.: Наука, 1974.
39. "Общая алгебра", т. 2 – сборник под ред.Скорнякова. М.: Наука, 1991.

Работы автора:

40. О тензоре кручения.// Международная геометрическая школа-семинар памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 27 сент. – 4 окт. 1996 г. Тезисы докл., с. 13-14.

41. Тензорные произведения в категориях.// Международный геометрический семинар имени Н. И. Лобачевского. Казань, 4-6 февраля 1997 г. Тезисы докл., с. 37

42. Об одной интерпретации тензора кручения связности.// Известия Вузов. Математика. №8(435). Казань, 1998 г. с. 22-28.

43. Локальные свойства дифференциальных операторов в категории модулей.// Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо, 5-11 сентября 1998 г. Тезисы докл., с. 188-189.

44. Локальные свойства дифференциальных операторов в категории модулей.// Известия НАН Армении. Математика. Том 33, №5, 1998 г.